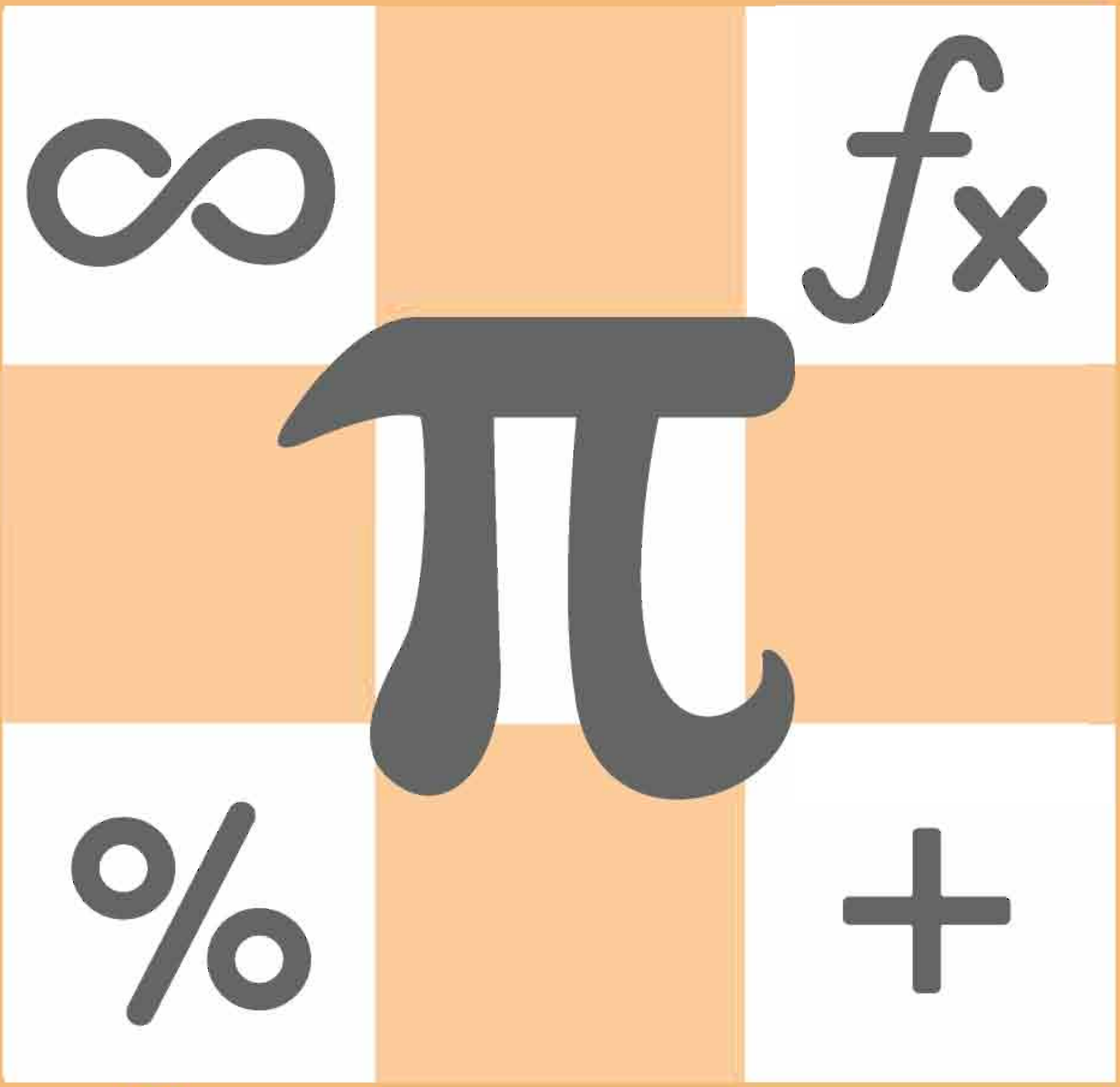
উচ্চতর গণিত

দাখিল

নবম–দশম শ্রেণি



জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক ২০১৫ শিক্ষাবর্ষ থেকে
দাখিল নবম-দশম শ্রেণির পাঠ্যপুস্তকরূপে নির্ধারিত

উচ্চতর গণিত
দাখিল

নবম-দশম শ্রেণি

সহজপাঠ্য, আকর্ষণীয় ও সহজবোধ্য করার জন্য পরিমার্জিত সংস্করণে
প্রয়োজনীয় সংযোজন, পরিবর্ধন, পুনর্লিখন ও সম্পাদনা

ড. মোহাম্মদ কায়কোবাদ
ড. মুহাম্মদ আবদুল হাকিম নিউটন
ড. রিফাত শাহরিয়ার
ড. আতিফ হাসান রহমান
ড. অমূল্য চন্দ্র মণ্ডল
ড. মুহম্মদ জাফর ইকবাল

পূর্ববর্তী সংস্করণ রচনা

ড. অমূল্য চন্দ্র মণ্ডল
ড. মোঃ আব্দুস ছামাদ
ড. মোঃ আব্দুল হালিম
ড. শাহাদৎ আলি মল্লিক

পূর্ববর্তী সংস্করণ সম্পাদনা

ড. মোঃ আব্দুল মতিন
ড. মোঃ আইনুল ইসলাম

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
৬৯-৭০ মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা
কর্তৃক প্রকাশিত

[প্রকাশক কর্তৃক সর্বস্বত্ব সংরক্ষিত]

প্রথম প্রকাশ: সেপ্টেম্বর, ২০১২
পরিমার্জিত সংস্করণ প্রকাশ: সেপ্টেম্বর, ২০১৭
পুনর্মুদ্রণ : ২০১৮

প্রচ্ছদ: নাসরীন সুলতানা মিতু

চিত্রাঙ্কন: ড. মুহাম্মদ আবদুল হাকিম নিউটন

ফন্ট প্রণয়ন: মো. তানবিন ইসলাম সিয়াম

বুক ডিজাইন: ড. মুহাম্মদ আবদুল হাকিম নিউটন, ড. আতিফ হাসান রহমান

পেইজ মেকাপ: ড. রিফাত শাহরিয়ার, আফিয়া আফরিন

পরিমার্জিত সংস্করণ সার্বিক সমন্বয়: মোহাম্মদ জয়নাল আবেদীন

গণপ্রজাতন্ত্রী বাংলাদেশ সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য

মুদ্রণে:

প্রসঙ্গ-কথা

ভাষা আন্দোলন ও মুক্তিযুদ্ধের চেতনায় দেশ গড়ার জন্য শিক্ষার্থীর অন্তর্নিহিত মেধা ও সম্ভাবনার পরিপূর্ণ বিকাশে সাহায্য করার মাধ্যমে উচ্চতর শিক্ষার যোগ্য করে তোলা মাধ্যমিক শিক্ষার অন্যতম লক্ষ্য। শিক্ষার্থীকে দেশের অর্থনৈতিক, সামাজিক, সাংস্কৃতিক ও পরিবেশগত পটভূমির প্রেক্ষিতে দক্ষ ও যোগ্য নাগরিক করে তোলাও মাধ্যমিক শিক্ষার অন্যতম বিবেচ্য বিষয়।

জাতীয় শিক্ষানীতি ২০১০ এর লক্ষ্য ও উদ্দেশ্যকে সামনে রেখে পরিমার্জিত শিক্ষাক্রমের আলোকে প্রণীত হয়েছে মাধ্যমিক স্তরের সকল পাঠ্যপুস্তক। পাঠ্যপুস্তকগুলোর বিষয় নির্বাচন ও উপস্থাপনের ক্ষেত্রে শিক্ষার্থীর নৈতিক ও মানবিক মূল্যবোধ থেকে শুরু করে ইতিহাস ও ঐতিহ্য চেতনা, মহান মুক্তিযুদ্ধের চেতনা, শিল্প-সাহিত্য-সংস্কৃতিবোধ, দেশপ্রেমবোধ, প্রকৃতি-চেতনা এবং ধর্ম-বর্ণ-গোত্র ও নারী-পুরুষ নির্বিশেষে সবার প্রতি সমমর্যাদাবোধ জাগ্রত করার চেষ্টা করা হয়েছে।

রূপকল্প ২০২১ বর্তমান সরকারের অন্যতম অঙ্গীকার। এই অঙ্গীকারকে সামনে রেখে গণপ্রজাতন্ত্রী বাংলাদেশ সরকারের মাননীয় প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা দেশকে নিরক্ষরতামুক্ত করার প্রত্যয় ঘোষণা করে ২০০৯ সালে প্রত্যেক শিক্ষার্থীর হাতে বিনামূল্যে পাঠ্যপুস্তক তুলে দেওয়ার নির্দেশনা প্রদান করেন। তাঁরই নির্দেশনা মোতাবেক ২০১০ সাল থেকে জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড বিনামূল্যে পাঠ্যপুস্তক বিতরণ শুরু করেছে।

উচ্চতর গণিত নবম-দশম শ্রেণির গণিতের ধারাবাহিকতায় চিন্তাশক্তি বিকাশের ও বিমূর্ত ধারণাকে বাস্তবের সাথে সম্পৃক্ত করে প্রত্যক্ষীকরণের শক্তিশালী হাতিয়ার হিসেবে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। জ্ঞান-বিজ্ঞান ও তথ্যপ্রযুক্তির ব্যাপক উন্নয়নে উচ্চতর গণিতের ব্যাপক ব্যবহার ও প্রয়োগ এখন সর্বত্র। এসব দিক বিবেচনায় রেখে মাধ্যমিক স্তরে উচ্চতর গণিত পাঠ্যপুস্তকটি প্রণয়ন করা হয়েছে। বিষয়টি শিক্ষার্থীদের কাছে সহজপাঠ্য, আকর্ষণীয় ও সহজবোধ্য করার জন্য ২০১৭ সালে পাঠ্যপুস্তকটিতে পরিমার্জন, সংযোজন ও পরিবর্ধন করা হয়েছে।

২০১৫ শিক্ষাবর্ষ থেকে মাধ্যমিক স্তরে প্রবর্তিত পাঠ্যপুস্তক মাদ্রাসা শিক্ষার বৈশিষ্ট্য উপযোগী করে দাখিল স্তরের পাঠ্যপুস্তকরূপে প্রবর্তন করা হয়েছে। বানানের ক্ষেত্রে অনুসৃত হয়েছে বাংলা একাডেমি কর্তৃক প্রণীত বানানরীতি। পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, চিত্রাঙ্কন, নমুনা প্রশ্নাদি প্রণয়ন ও প্রকাশনার কাজে যাঁরা আন্তরিকভাবে মেধা ও শ্রম দিয়েছেন তাঁদের ধন্যবাদ জ্ঞাপন করছি।

চেয়ারম্যান
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

সূচিপত্র

১ সেট ও ফাংশন ১
২ বীজগাণিতিক রাশি ৩৮
৩ জ্যামিতি ৬৩
৪ জ্যামিতিক অঙ্কন ৮২
৫ সমীকরণ ৯৬
৬ অসমতা ১২৩
৭ অসীম ধারা ১৩৬
৮ ত্রিকোণমিতি ১৪৬
৯ সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন ১৯৩
১০ দ্বিপদী বিস্তৃতি ২২৩
১১ স্থানাঙ্ক জ্যামিতি ২৩৯
১২ সমতলীয় ভেক্টর ২৭১
১৩ ঘন জ্যামিতি ২৮৭
১৪ সম্ভাবনা ৩০৬
স্মরণীয় কয়েকজন গণিতবিদ ৩২৮
পরিশিষ্ট ৩৩৩

অধ্যায় ১

সেট ও ফাংশন (Set and Function)

সেটের ধারণা ও ব্যবহার গণিতে বিশেষ গুরুত্বপূর্ণ। এ জন্য অষ্টম ও নবম-দশম শ্রেণির গণিত বইতে সেট সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। এ অধ্যায়ে তার বিস্তৃতি হিসেবে আরো আলোচনা করা হলো।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা -

- সার্বিক সেট, উপসেট, পূরক সেট ও শক্তি সেট গঠন করতে পারবে।
- বিভিন্ন সেটের সংযোগ, ছেদ ও অন্তর নির্ণয় করতে পারবে।
- সেট প্রক্রিয়ার ধর্মাবলির যৌক্তিক প্রমাণ করতে পারবে।
- সমতুল সেট বর্ণনা করতে পারবে এবং এর মাধ্যমে অসীম সেটের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সেটের সংযোগের শক্তি সেট নির্ণয়ের সূত্র ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং ভেনচিত্র ও উদাহরণের সাহায্যে তা যাচাই করতে পারবে।
- সেট প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে জীবনভিত্তিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- সেটের সাহায্যে অন্বয় ও ফাংশন এর ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে পারবে।
- এক-এক ফাংশন, সার্বিক ফাংশন ও এক-এক সার্বিক ফাংশন উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বিপরীত ফাংশন ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- লেখচিত্রের সাহায্যে কোন অন্বয় ফাংশন কিনা তা যাচাই করতে পারবে।
- অন্বয় ও ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করতে পারবে।

সেট (Set)

বাস্তব বা চিন্তা জগতের বস্তুর যেকোনো সুনির্ধারিত সংগ্রহকে **সেট** বলা হয়। যেমন, $S = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$ তালিকাটি 10 থেকে বড় নয় এমন স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সেট। সেটকে এভাবে তালিকার সাহায্যে বর্ণনা করাকে **তালিকা পদ্ধতি** বলা হয়। যে সকল বস্তু নিয়ে সেট গঠিত এদের প্রত্যেককে ঐ **সেটের উপাদান** বলা হয়। x, A সেটের উপাদান হলে লেখা হয় $x \in A$ এবং x, A সেটের উপাদান না হলে লেখা হয় $x \notin A$। উপরোক্ত সেট S কে লেখা হয়

$S = \{x : x, 100$ থেকে বড় নয় এমন পূর্ণবর্গ সংখ্যা$\}$। এই পদ্ধতিকে **সেট গঠন পদ্ধতি** বলা হয়।

কাজ: উপরের আলোচনায় ক) S যে সেট তা ব্যাখ্যা কর। খ) S কে অন্যভাবে প্রকাশ কর।

সার্বিক সেট (Universal Set)

মনে করি

$S = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $5x \leq 16\}$

$T = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $x^2 < 20\}$

$P = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $\sqrt{x} \leq 2\}$

এই সেট তিনটির উপাদানসমূহ $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা$\}$ সেটটির উপাদান নিয়ে গঠিত। U কে S, T, P সেটের জন্য সার্বিক সেট বিবেচনা করা যায়।

সেট সংক্রান্ত কোনো আলোচনায় একটি নির্দিষ্ট সেটকে **সার্বিক সেট** বলা হয়, যদি আলোচনাধীন সকল সেটের উপাদানসমূহ ঐ নির্দিষ্ট সেটের অন্তর্ভুক্ত হয়।

কয়েকটি বিশেষ সংখ্যা সেট

$N = \{1, 2, 3, \cdots\}$ অর্থাৎ সকল স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট।

$Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ অর্থাৎ সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট।

$Q = \{x : x = \frac{p}{q}$, যেখানে p যেকোনো পূর্ণ সংখ্যা এবং q যে কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা$\}$ অর্থাৎ সকল মূলদ সংখ্যার সেট।

$R = \{x : x$ বাস্তব সংখ্যা$\}$ অর্থাৎ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

উপসেট (Subset)

A ও B সেট হলে A কে B এর **উপসেট** বলা হয় যদি ও কেবল যদি A এর প্রত্যেক উপাদান B এর উপাদান হয় এবং একে $A \subseteq B$ লিখে প্রকাশ করা হয়। যেমন $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ এর উপসেট। A, B এর উপসেট না হলে $A \not\subseteq B$ লেখা হয়। যেমন $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ এর উপসেট নয়।

উদাহরণ ১. যদি $A = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা$\}$, $B = \{0\}$ এবং $X = \{x : x$ পূর্ণ সংখ্যা$\}$ হয়, তবে A, B এবং X এর মধ্যে সম্পর্ক কী?

সমাধান: এখানে $A \subseteq X,\ B \subseteq X,\ B \not\subseteq A$।

কাজ: মনে কর $X = \{x : x$ পূর্ণ সংখ্যা$\}$।

ক) X কে সার্বিক সেট ধরে, X এর তিনটি উপসেট বর্ণনা কর।

খ) X এর দুইটি উপসেট বর্ণনা কর যাদের কোনোটিই অপরটির উপসেট নয়।

ফাঁকা সেট (Empty Set)

অনেক সময় এরূপ সেট বিবেচনা করতে হয় যাতে কোনো উপাদান থাকে না। এরূপ সেটকে **ফাঁকা** সেট বলা হয় এবং $\varnothing$ অথবা $\{\}$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ২. $\{x : x$ বাস্তব সংখ্যা এবং $x^2 < 0\}$ একটি ফাঁকা সেট, কেননা কোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক নয়।

উদাহরণ ৩. $F = \{x : x,$ ২০১৪ সাল পর্যন্ত ফুটবলের বিশ্বকাপ বিজয়ী আফ্রিকার দেশ$\}$ একটি ফাঁকা সেট, কেননা আফ্রিকার কোন দেশই ২০১৪ সাল পর্যন্ত ফুটবলের বিশ্বকাপ জয় করতে পারেনি।

সেট সমতা (Equality of Sets)

A ও B সেট যদি এমন হয় যে এদের উপাদানগুলো একই তবে A ও B একই সেট এবং তা $A = B$ লিখে প্রকাশ করা হয়। যেমন $A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{1, 2, 2, 3, 4, 4, 4\}$। লক্ষ কর কোনো সেটে একই উপাদান বার বার থাকলেও সেটা একবার থাকার মতই বিবেচনা করা হচ্ছে। $A = B$ হয় যদি ও কেবল যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়। সেট সমতা প্রমাণে এই তথ্য খুবই প্রয়োজনীয়।

প্রকৃত উপসেট (Proper Subset)

A কে B এর **প্রকৃত উপসেট** বলা হয় যদি ও কেবল যদি $A \subseteq B$ এবং $A \neq B$। অর্থাৎ A এর প্রত্যেক উপাদান B এরও উপাদান এবং B তে অন্তত একটি উপাদান আছে যা A তে নেই। যেমন $A = \{1, 2\},\ B = \{1, 2, 3\}$। A, B এর প্রকৃত উপসেট বুঝাতে $A \subset B$ লেখা হয়।

ক) যেকোনো সেট A এর জন্য $A \subseteq A$। এর কারণ $x \in A \implies x \in A$।

খ) যেকোনো সেট A এর জন্য $\varnothing \subseteq A$। এর কারণ $\varnothing \subseteq A$ না হলে $\varnothing$ তে একটি উপাদান x আছে যা A তে নাই। কিন্তু ইহা কখনই সত্য নয় কারণ $\varnothing$ ফাঁকা সেট। অতএব $\varnothing \subseteq A$। উল্লেখ্য ফাঁকা সেট বা $\varnothing$ যেকোনো সেটের প্রকৃত উপসেট।

সেটের অন্তর (Difference of Sets)

A ও B সেট হলে $A \setminus B$ সেটটি হচ্ছে $\{x : x \in A$ এবং $x \notin B\}$।

$A \setminus B$ কে A **বাদ** B সেট বলা হয় এবং A এর যে সকল উপাদান B তে আছে সেগুলো A থেকে বর্জন করে $A \setminus B$ গঠন করা হয়। $A \setminus B \subseteq A$।

উদাহরণ ৪. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ এবং $B = \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$ হলে $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$।

পূরক সেট (Complementary Set)

সার্বিক সেট U এবং $A \subseteq U$ হলে A এর **পূরক সেট** হচ্ছে $U \setminus A$।

অর্থাৎ $U \setminus A = \{x : x \in U \text{ এবং } x \notin A\}$।

সার্বিক সেট থেকে A সেটের উপাদানগুলো বর্জন করলেই A এর পূরক সেট পাওয়া যায় এবং তাকে A' বা A^c লিখে প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ ৫. যদি সার্বিক সেট U সকল পূর্ণসংখ্যার সেট হয় এবং A সকল ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট হয়, তবে (U সাপেক্ষে) A এর পূরক সেট A' বা $A^c = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$

শক্তি সেট (Power Set)

A সেটের সকল উপসেটের সেটকে A এর **শক্তি সেট** বলা হয় এবং $P(A)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। উল্লেখ্য যে $\varnothing \subseteq A$। কাজেই $\varnothing$, $P(A)$ এরও উপাদান।

A সেট	$P(A)$ শক্তি সেট
$A = \varnothing$	$P(A) = \{\varnothing\}$
$A = \{a\}$	$P(A) = \{\varnothing, A\}$
$A = \{a, b\}$	$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, A\}$
$A = \{a, b, c\}$	$P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$

কাজ:

ক) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ হলে নিচের সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লেখ:

(১) $A = \{x : x \in U,\ 5x > 37\}$ (২) $B = \{x : x \in U,\ x + 5 < 12\}$

(৩) $C = \{x : x \in U,\ 6 < 2x < 17\}$ (৪) $D = \{x : x \in U, x^2 < 37\}$

খ) $U = \{x : x \in Z^+, 1 \leq x \leq 20\}$ হলে নিচের সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লেখ:

(১) $A = \{x : x, 2 \text{ এর গুণিতক}\}$ (২) $B = \{x : x, 5 \text{ এর গুণিতক}\}$

(৩) $C = \{x : x, 10 \text{ এর গুণিতক}\}$

প্রদত্ত তথ্যের আলোকে $C \subset A,\ B \subset A,\ C \subset B$ এর কোনগুলো সত্য বা মিথ্যা বল।

গ) যদি $A = \{a, b, c, d, e\}$ হয়, তবে $P(A)$ নির্ণয় কর।

উদাহরণ ৬. $A = \{a, b\}$ এবং $B = \{b, c\}$ হলে দেখাও যে, $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$।

সমাধান: এখানে, $P(A) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $P(B) = \{\varnothing, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$।

$\therefore\ P(A) \cup P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$।

$A \cup B = \{a, b, c\}, P(A \cup B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$।

সুতরাং, $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$।

কাজ:

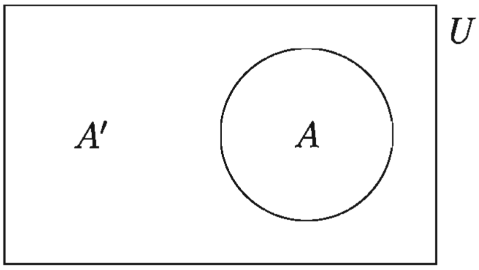
ক) যদি $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2\}, C = \{2, 3\}$ এবং $D = \{1, 3\}$ হয়, তবে দেখাও যে, $P(A) = \{A, B, C, D, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\}$।

খ) যদি $A = \{1, 2\}$ এবং $B = \{2, 5\}$ হয়, তবে দেখাও যে,
(১) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$, (২) $P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$।

ভেনচিত্র (Venn Diagram)

সেট সংক্রান্ত তথ্যাদি অনেক সময় চিত্রে প্রকাশ করা সুবিধাজনক। উদ্ভাবক John Venn (১৮৩৪ – ১৯২৩) এর নামানুসারে এরূপ চিত্রকে **ভেনচিত্র** বলা হয়। গণিত বইতে এ সম্পর্কে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে।

উদাহরণ ৭. সার্বিক সেট U এর সাপেক্ষে A সেট এর পূরক সেট A' এর চিত্ররূপ:



সেটের সংযোগ (Union of Sets)

A ও B সেট হলে এদের **সংযোগ সেট** হচ্ছে $A \cup B = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$।
অর্থাৎ A ও B উভয় সেটের সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটই $A \cup B$।

সেটের ছেদ (Intersection of Sets)

A ও B সেট হলে এদের **ছেদ সেট** হচ্ছে $A \cap B = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$।
অর্থাৎ A ও B সেটের সকল সাধারণ উপাদান নিয়ে গঠিত সেটই $A \cap B$।

উদাহরণ ৮. সার্বিক সেট $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ এর দুইটি উপসেট $A = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$ এবং $B = \{x : x$ বিজোড় সংখ্যা$\}$।

তাহলে $A = \{2, 3, 5, 7\}$ এবং $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$।

সুতরাং $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $A \cap B = \{3, 5, 7\}$,

$A' = \{0, 1, 4, 6, 8, 9\}$, $B' = \{0, 2, 4, 6, 8\}$,

$A' \cup B' = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9\}, A' \cap B' = \{0, 4, 6, 8\}$,

$(A \cap B)' = \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9\}, (A \cup B)' = \{0, 4, 6, 8\}$।

২০১৯

কাজ: উপরের উদাহরণের সেটগুলোকে ভেন চিত্রে দেখাও।

নিশ্ছেদ সেট (Disjoint Set)

যদি A ও B সেট এমন হয় যে $A \cap B = \varnothing$, তবে A ও B কে নিশ্ছেদ সেট বলা হয়।

উদাহরণ ৯. $A = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা$\}$ এবং $B = \{x : x$ ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা$\}$ হলে A ও B সেটদ্বয় নিশ্ছেদ, কেননা $A \cap B = \varnothing$।

উদাহরণ ১০. $A = \{x : x \in R$ এবং $0 \leq x \leq 2\}$ এবং $B = \{x : x \in N$ এবং $0 \leq x \leq 2\}$ হলে $B \subseteq A, A \cup B = A, A \cap B = B = \{1, 2\}$।

উদাহরণ ১১. $A = \{x : x \in R$ এবং $1 \leq x \leq 2\}$ এবং $B = \{x : x \in R$ এবং $0 < x < 1\}$ হলে, $A \cup B = \{x : x \in R$ এবং $0 < x \leq 2\}$ এবং $A \cap B = \varnothing$ অর্থাৎ A ও B নিশ্ছেদ।

কার্তেসীয় গুণজসেট (Cartesian Product Set)

দুইটি সেট A এবং B এর কার্তেসীয় গুণজ $A \times B = \{(x, y) : x \in A$ এবং $y \in B\}$।

উদাহরণ ১২. $A = \{1, 2\},\ B = \{a, b, c\}$ দুইটি সেট। সুতরাং এই দুইটি সেটের কার্তেসীয় গুণজ সেট $A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$।

সেট প্রক্রিয়ার কতিপয় প্রতিজ্ঞা

এখানে প্রত্যেক ক্ষেত্রে U সার্বিক সেট এবং A, B, C সেটগুলো U এর উপসেট।

ক) বিনিময় বিধি

(১) $A \cup B = B \cup A$

(২) $A \cap B = B \cap A$

খ) সংযোগ বিধি

(১) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(২) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

গ) বন্টন বিধি

(১) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(২) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ঘ) ডি মরগ্যানের সূত্র

(১) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(২) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

ঙ) অন্যান্য সূত্র

(১) $A \cup A = A,\ A \cap A = A$

(২) $A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing$

(৩) $A \cup U = U,\ A \cap U = A$

(৪) $A \subseteq B \implies B' \subseteq A'$

(৫) $A \subseteq B \implies A \cup B = B$

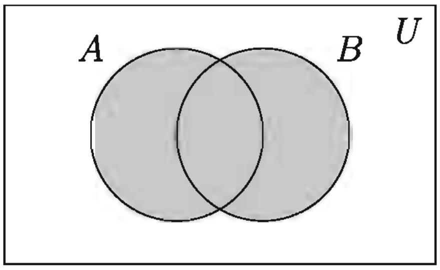
(৬) $A \subseteq B \implies A \cap B = A$

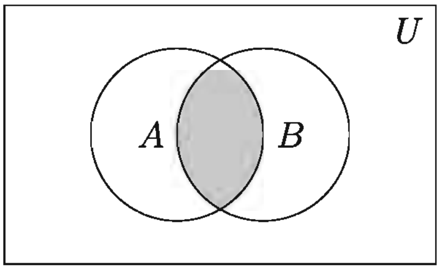
(৭) $A \subseteq A \cup B$ (৮) $A \cap B \subseteq A$

(৯) $A \setminus B = A \cap B'$

বিনিময় বিধির প্রতিজ্ঞা দুইটি যাচাইকরণ

নিচের বামের চিত্রে গাঢ় অংশটুকু $A \cup B$ এবং $B \cup A$ উভয় সেটই নির্দেশ করে। সুতরাং এক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে $A \cup B = B \cup A$। নিচের ডানের চিত্রে গাঢ় অংশটুকু $A \cap B$ এবং $B \cap A$ উভয় সেটই নির্দেশ করে। সুতরাং এক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে $A \cap B = B \cap A$।





উপরে ভেনচিত্রের সাহায্যে যাচাই করা হয়েছে। এবার সুনির্দিষ্ট উদাহরণ দিয়ে দেখা যাক।

মনে করি $A = \{1, 2, 4\}$ এবং $B = \{2, 3, 5\}$ দুইটি সেট।

তাহলে, $A \cup B = \{1, 2, 4\} \cup \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$।

আবার, $B \cup A = \{2, 3, 5\} \cup \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$।

সুতরাং এক্ষেত্রে $A \cup B = B \cup A$।

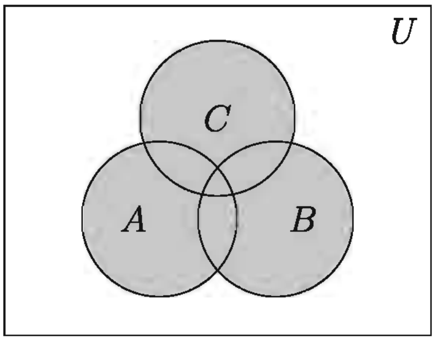
অন্য দিকে, $A \cap B = \{1, 2, 4\} \cap \{2, 3, 5\} = \{2\}$

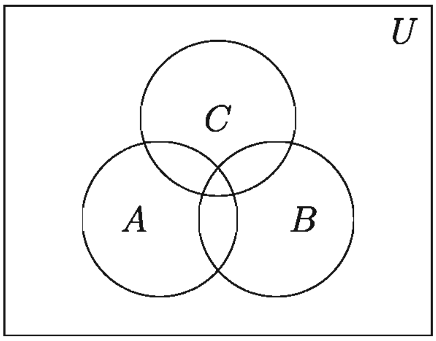
এবং $B \cap A = \{2, 3, 5\} \cap \{1, 2, 4\} = \{2\}$।

সুতরাং এক্ষেত্রে $A \cap B = B \cap A$।

সংযোগ বিধির প্রতিজ্ঞা দুইটির যাচাইকরণ

নিচের বামের চিত্রে গাঢ় অংশটুকু $A \cup (B \cup C)$ এবং $(A \cup B) \cup C$ উভয় সেটই নির্দেশ করে। সুতরাং এক্ষেত্রে $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$। নিচের ডানের চিত্রে গাঢ় অংশটুকু $A \cap (B \cap C)$ এবং $(A \cap B) \cap C$ উভয় সেটই নির্দেশ করে। সুতরাং এক্ষেত্রে $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$।





উপরে ভেনচিত্রের সাহায্যে যাচাই করা হয়েছে। এবার সুনির্দিষ্ট উদাহরণ দিয়ে দেখা যাক।

মনে করি $A = \{a, b, c, d\}, B = \{b, c, f\}$ এবং $C = \{c, d, g\}$।

তাহলে, $B \cup C = \{b, c, f\} \cup \{c, d, g\} = \{b, c, d, f, g\}$

এবং $A \cup (B \cup C) = \{a, b, c, d\} \cup \{b, c, d, f, g\} = \{a, b, c, d, f, g\}$।

আবার, $A \cup B = \{a, b, c, d\} \cup \{b, c, f\} = \{a, b, c, d, f\}$

এবং $(A \cup B) \cup C = \{a, b, c, d, f\} \cup \{c, d, g\} = \{a, b, c, d, f, g\}$।

সুতরাং এক্ষেত্রে $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$।

আবার, $B \cap C = \{b, c, f\} \cap \{c, d, g\} = \{c\}$

এবং $A \cap (B \cap C) = \{a, b, c, d\} \cap \{c\} = \{c\}$।

আবার, $A \cap B = \{a, b, c, d\} \cap \{b, c, f\} = \{b, c\}$

এবং $(A \cap B) \cap C = \{b, c\} \cap \{c, d, g\} = \{c\}$।

সুতরাং এক্ষেত্রে $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$।

কাজ: বন্টন বিধির সূত্রটি যাচাই কর, যেখানে $A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$ এবং $C = \{3, 5, 6, 7\}$। এই যাচাইকরণ ভেনচিত্রের মাধ্যমেও দেখাও।

দ্রষ্টব্য: সেটের সংযোগ ও ছেদ প্রক্রিয়া দুইটির প্রতিটি অপরটির প্রেক্ষিতে বন্টন নিয়ম মেনে চলে।

প্রতিজ্ঞা ১ (ডি মরগ্যানের সূত্র). সার্বিক সেট U এর যেকোনো উপসেট A ও B এর জন্য

ক) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ খ) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

প্রমাণ: (কেবল প্রথমটির প্রমাণ নিচে দেখানো হয়েছে। পরেরটির প্রমাণ নিজে কর।)

ক) মনে করি, $x \in (A \cup B)'$। তাহলে, $x \notin A \cup B$।

$\implies x \notin A$ এবং $x \notin B \implies x \in A'$ এবং $x \in B' \implies x \in A' \cap B'$

$\therefore\ (A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$।

আবার মনে করি, $x \in A' \cap B'$। তাহলে, $x \in A'$ এবং $x \in B'$।

$\implies x \notin A$ এবং $x \notin B \implies x \notin A \cup B \implies x \in (A \cup B)'$

$\therefore\ A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$।

সুতরাং $(A \cup B)' = A' \cap B'$।

প্রতিজ্ঞা ২. সার্বিক সেট U এর যেকোনো উপসেট A ও B এর জন্য $A \setminus B = A \cap B'$

প্রমাণ: মনে করি, $x \in A \setminus B$। তাহলে, $x \in A$ এবং $x \notin B$।

$\implies x \in A$ এবং $x \in B' \implies x \in A \cap B'$

$\therefore\ A \setminus B \subseteq A \cap B'$।

আবার মনে করি, $x \in A \cap B'$। তাহলে, $x \in A$ এবং $x \in B'$।

$\implies x \in A$ এবং $x \notin B \implies x \in A \setminus B$

$\therefore\ A \cap B' \subseteq A \setminus B$।

সুতরাং, $A \setminus B = A \cap B'$।

প্রতিজ্ঞা ৩. যেকোনো সেট A, B, C এর জন্য

ক) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

খ) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

প্রমাণ:(কেবল প্রথমটির প্রমাণ নিচে দেখানো হয়েছে। পরেরটির প্রমাণ নিজে কর।)

ক) সংজ্ঞানুসারে, $A \times (B \cap C)$

$= \{(x, y) : x \in A,\ y \in B \cap C\}$

$= \{(x, y) : x \in A,\ y \in B$ এবং $y \in C\}$

$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times B$ এবং $(x, y) \in A \times C\}$

$= \{(x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)\}$

$\therefore\ A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$

আবার, $(A \times B) \cap (A \times C)$

$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times B$ এবং $(x, y) \in A \times C\}$

$= \{(x, y) : x \in A,\ y \in B$ এবং $x \in A,\ y \in C\}$

$= \{(x, y) : x \in A,\ y \in B \cap C\}$

$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times (B \cap C)\}$

$\therefore\ (A \times B) \cap (A \times C) \subseteq A \times (B \cap C)$

সুতরাং, $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$।

সেট প্রক্রিয়া সংক্রান্ত আরো কতিপয় প্রতিজ্ঞা

ক) A যেকোনো সেট হলে $A \subseteq A$।

খ) ফাঁকা সেট $\varnothing$ যেকোনো সেট A এর উপসেট।

গ) A ও B যেকোনো সেট হলে $A = B$ হবে যদি ও কেবল যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq A$ হয়।

ঘ) যদি $A \subseteq \varnothing$ হয়, তবে $A = \varnothing$।

ঙ) যদি $A \subseteq B$ এবং $B \subseteq C$ তবে, $A \subseteq C$।

চ) A ও B যেকোনো সেট হলে, $A \cap B \subseteq A$ এবং $A \cap B \subseteq B$।

ছ) A ও B যেকোনো সেট হলে, $A \subseteq A \cup B$ এবং $B \subseteq A \cup B$।

প্রমাণ: কেবল দুইটি প্রতিজ্ঞার প্রমাণ দেওয়া হয়েছে। অন্যগুলো নিজে কর।

ঘ) দেওয়া আছে, $A \subseteq \varnothing$, আবার আমরা জানি, $\varnothing \subseteq A$। সুতরাং $A = \varnothing$।

ছ) সেট সংযোগের সংজ্ঞানুযায়ী, A সেটের সকল উপাদান $A \cup B$ সেটে থাকে। সুতরাং উপসেটের সংজ্ঞানুযায়ী $A \subseteq A \cup B$। একই যুক্তিতে $B \subseteq A \cup B$।

কাজ: নিচের সকল সেট সার্বিক সেট U এর উপসেট বিবেচনা করতে হবে।

ক) দেখাও যে, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$।

খ) দেখাও যে, $A \subset B$ হবে যদি এবং কেবল যদি নিম্নোক্ত যেকোনো একটি শর্ত খাটে:
(১) $A \cap B = A$ (২) $A \cup B = B$ (৩) $B' \subset A'$
(৪) $A \cap B' = \varnothing$ (৫) $B \cup A' = U$

গ) দেখাও যে,
(১) $A \setminus B \subset A \cup B$ (২) $A' \setminus B' = B \setminus A$
(৩) $A \setminus B \subset A$ (৪) $A \subset B$ হলে, $A \cup (B \setminus A) = B$
(৫) $A \cap B = \varnothing$ হলে, $A \subset B'$ এবং $A \cap B' = A$ এবং $A \cup B' = B'$

ঘ) দেখাও যে,
(১) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (২) $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$
(৩) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$

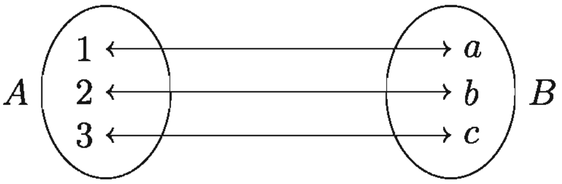
এক-এক মিল (One-One Correspondence)

মনে করি, $A = \{a, b, c\}$ তিনজন লোকের সেট এবং $B = \{30, 40, 50\}$ ঐ তিনজন লোকের বয়সের সেট। অধিকন্তু মনে করি, a এর বয়স 30 বছর, b এর বয়স 40 বছর এবং c এর বয়স 50 বছর। বলা যায় যে, A সেটের সাথে B সেটের এক-এক মিল আছে।

সংজ্ঞা ১ (এক-এক মিল). যদি A সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে B সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদান এবং B সেটের প্রতিটি উপাদানের সাথে A সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদানের মিল স্থাপন করা যায়, তবে তাকে A ও B এর মধ্যে **এক-এক মিল** বলা হয়। A ও B এর মধ্যে এক-এক মিলকে সাধারণত $A \leftrightarrow B$ লিখে প্রকাশ করা হয় এবং A সেটের কোনো সদস্য x এর সঙ্গে B সেটের যে সদস্য y এর মিল করা হয়েছে তা $x \leftrightarrow y$ লিখে বর্ণনা করা হয়।

সমতুল সেট (Equivalent Set)

ধরি, $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{a, b, c\}$ দুইটি সেট। নিচের চিত্রে A ও B সেটদ্বয়ের মধ্যে একটি এক-এক মিল স্থাপন করে দেখানো হলো:



সংজ্ঞা ২ (সমতুল সেট). যেকোনো সেট A ও B এর মধ্যে যদি একটি এক-এক মিল $A \leftrightarrow B$ বর্ণনা করা যায়, তবে A ও B কে **সমতুল সেট** বলা হয়। A ও B কে সমতুল বোঝাতে $A \sim B$ লেখা হয়। $A \sim B$ হলে, এদের যেকোনো একটিকে অপরটির সাথে **সমতুল** বলা হয়। লক্ষণীয় যে, যেকোনো সেট A, B ও C এর জন্য

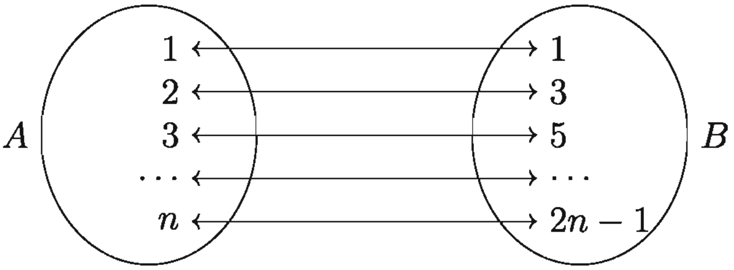
ক) $A \sim A$

খ) $A \sim B$ হলে $B \sim A$

গ) $A \sim B$ এবং $B \sim C$ হলে $A \sim C$।

উদাহরণ ১৩. দেখাও যে, $A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ এবং $B = \{1, 3, 5, \cdots, 2n-1\}$ সেটদ্বয় সমতুল, যেখানে n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা।

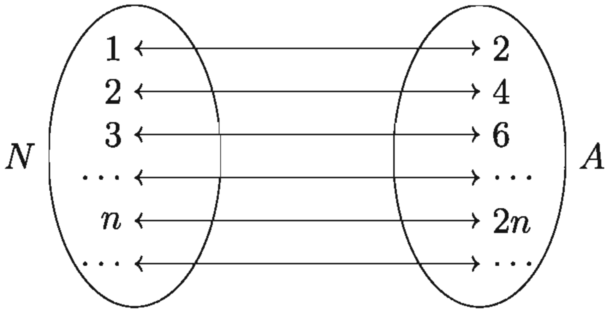
সমাধান: A ও B সমতুল, কারণ সেট দুইটির মধ্যে নিচের মতো একটি এক-এক মিল রয়েছে।



মন্তব্য: উপরে চিত্রিত এক-এক মিলটিকে $A \leftrightarrow B : k \leftrightarrow 2k-1,\ k \in A$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

উদাহরণ ১৪. দেখাও যে, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এবং জোড় সংখ্যার সেট $A = \{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$ সমতুল।

সমাধান: $N = \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$ ও A সমতুল সেট, কারণ N এবং A এর মধ্যে নিচের চিত্রের মতো একটি এক-এক মিল রয়েছে।

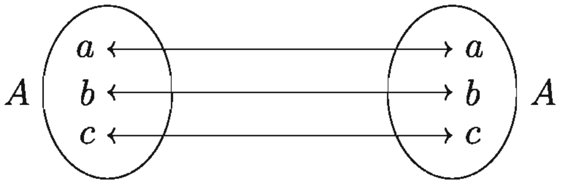


মন্তব্য: উপরে চিত্রিত এক-এক মিলটিকে $N \leftrightarrow A : n \leftrightarrow 2n, n \in N$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

দ্রষ্টব্য: ফাঁকা সেট $\varnothing$ কে নিজের সমতুল ধরা হয়। অর্থাৎ, $\varnothing \sim \varnothing$।

প্রতিজ্ঞা ৪. প্রত্যেক সেট A তার নিজের সমতুল। অর্থাৎ, $A \sim A$।

প্রমাণ: $A = \varnothing$ হলে, $A \sim A$ ধরা হয়। আর $A \neq \varnothing$ হলে প্রত্যেক সদস্য x এর সঙ্গে তার নিজেকে মিল করে এক-এক মিল $A \leftrightarrow A : x \leftrightarrow x,\ x \in A$ স্থাপিত হয়। সুতরাং $A \sim A$।



প্রতিজ্ঞা ৫. A ও B সমতুল সেট এবং B ও C সমতুল সেট হলে A ও C সমতুল সেট।

প্রমাণ: যেহেতু $A \sim B$, সুতরাং A এর প্রত্যেক সদস্য x এর সঙ্গে B এর একটি অনন্য সদস্য y এর মিল করা যায়। আবার যেহেতু $B \sim C$, সুতরাং B এর এই সদস্য y এর সঙ্গে C এর একটি অনন্য সদস্য z এর মিল করা যায়। এখন A এর সদস্য x এর সঙ্গে C এর সদস্য z এর মিল করা হলে, A ও C সেটের মধ্যে একটি এক-এক মিল স্থাপিত হয়। অর্থাৎ, $A \sim C$ হয়।

ব্যবধি (Interval)

a ও b বাস্তব সংখ্যা এবং $a < b$ হলে

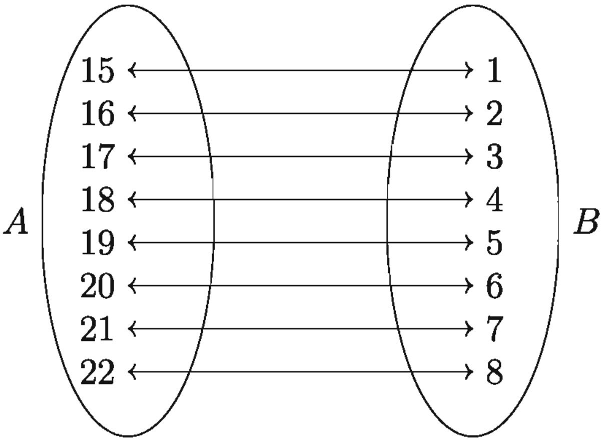
ক) $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$ কে **খোলা ব্যবধি** (open interval) বলে।

খ) $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$ কে **বদ্ধ ব্যবধি** (closed interval) বলে।

গ) $(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$ এবং $[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$ কে যথাক্রমে **খোলা-বন্ধ** ও **বন্ধ-খোলা ব্যবধি** বলে।

সান্ত ও অনন্ত সেট (Finite and Infinite Sets)

$A = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\}$ সেটটির সদস্যগুলো গণনা করে দেখা যায় যে, A সেটের সদস্য সংখ্যা ৪। এই গণনার কাজ A সেটের সঙ্গে $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ সেটের একটি এক-এক মিল স্থাপন করে সম্পন্ন করা হয়। যেমন, নিচের চিত্রে দেখানো হয়েছে।



সংজ্ঞা ৩ (সান্ত ও অনন্ত সেট). গণনা করে যে সকল সেটের সদস্য সংখ্যা নির্ধারণ করা যায়, এদের **সান্ত সেট** বলা হয়। কোনো সেট A সান্ত সেট না হলে, একে **অনন্ত সেট** বলা হয়।

ক) ফাঁকা সেট $\varnothing$ সান্ত সেট, এর সদস্য সংখ্যা 0।

খ) যদি কোনো সেট A এবং $J_m = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$ সমতুল হয়, যেখানে $m \in N$, তবে A একটি সান্ত সেট এবং A এর সদস্য সংখ্যা m।

গ) A কোনো সান্ত সেট হলে, A এর সদস্য সংখ্যাকে $n(A)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

দ্রষ্টব্য:

ক) $J_1 = \{1\},\ J_2 = \{1, 2\}, J_3 = \{1, 2, 3\}$ ইত্যাদি প্রত্যেককেই N এর **সান্ত উপসেট** বলা হয় এবং $n(J_1) = 1,\ n(J_2) = 2,\ n(J_3) = 3$ ইত্যাদি। বাস্তবিক পক্ষে, $J_m \sim J_m$ এবং $n(J_m) = m$।

খ) শুধুমাত্র সান্ত সেটেরই সদস্য সংখ্যা নির্দিষ্ট করা যায়। $n(A)$ লিখলে বুঝতে হবে A সান্ত সেট।

গ) A ও B সমতুল সেট এবং এদের মধ্যে একটি সেট সান্ত হলে অপর সেটটিও সান্ত হবে এবং $n(A) = n(B)$ হবে।

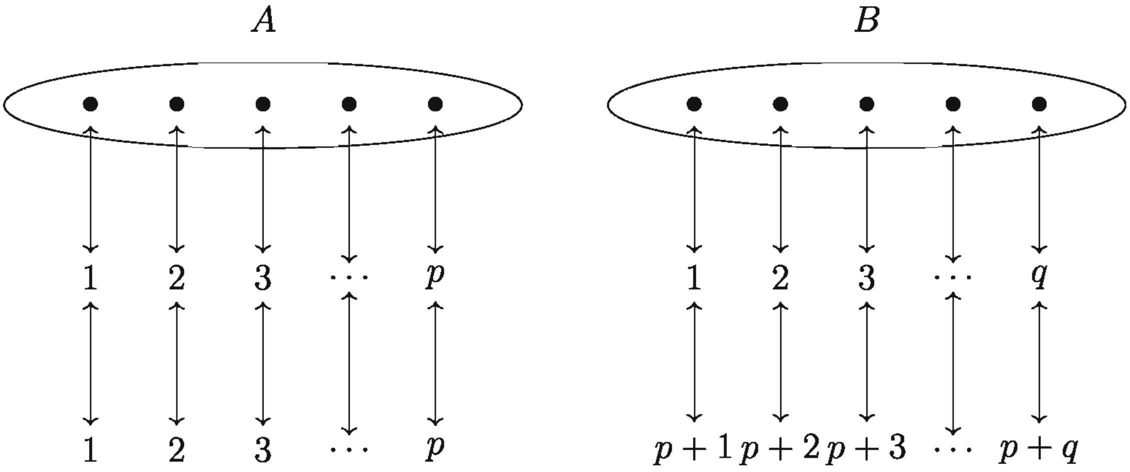
প্রতিজ্ঞা ৬. যদি A সান্ত সেট হয় এবং B, A এর প্রকৃত উপসেট হয়, তবে B সান্ত সেট এবং $n(B) < n(A)$ হবে।

প্রতিজ্ঞা ৭. A অনন্ত সেট হবে যদি ও কেবল যদি A ও A এর একটি প্রকৃত উপসেট সমতুল হয়।

দ্রষ্টব্য: স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N একটি অনন্ত সেট।

সান্ত সেটের উপাদান সংখ্যা

সান্ত সেট A এর উপাদান সংখ্যা $n(A)$ দ্বারা সূচিত করা হয়েছে এবং $n(A)$ নির্ধারণের পদ্ধতি ব্যাখ্যা করা হয়েছে। এবার মনে করি, $n(A) = p > 0,\ n(B) = q > 0$ যেখানে $A \cap B = \varnothing$।



উপরের চিত্রে বর্ণিত এক-এক মিল থেকে দেখা যায় যে, $A \cup B \sim J_{p+q}$।

অর্থাৎ, $n(A \cup B) = p + q = n(A) + n(B)$। এ থেকে নিচের প্রতিজ্ঞাটি বলা যায়।

প্রতিজ্ঞা ৮. যদি A ও B পরস্পর নিশ্ছেদ সান্ত সেট হয়, তবে $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$।

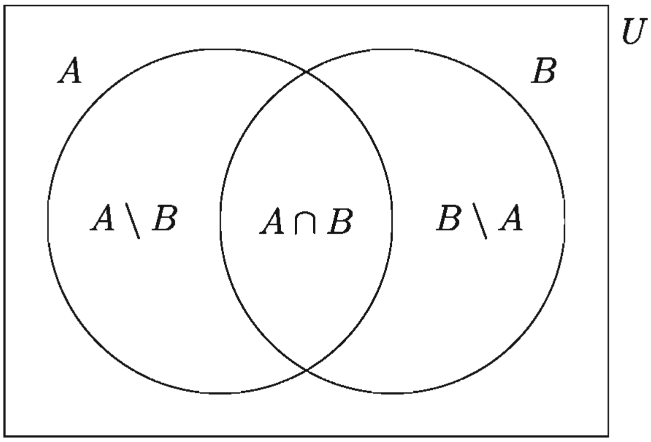
এই প্রতিজ্ঞাকে সম্প্রসারণ করে বলা যায় যে, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C)$।

একইভাবে $n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D)$ ইত্যাদি,

যেখানে A, B, C, D সেটগুলো পরস্পর নিশ্ছেদ সান্ত সেট।

প্রতিজ্ঞা ৯. যেকোনো সান্ত সেট A ও B এর জন্য $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$।

প্রমাণ: এখানে, $A \setminus B,\ A \cap B$ এবং $B \setminus A$ সেট তিনটি পরস্পর নিশ্ছেদ সেট [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]।



ফলে $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ এবং $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

অতএব $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$

$\therefore \; n(A) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) \cdots\cdots (1)$

$\therefore \; n(B) = n(B \setminus A) + n(A \cap B) \cdots\cdots (2)$

$n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(A \cap B) + n(B \setminus A) \cdots\cdots (3)$

সুতরাং, (1) নং থেকে পাই, $n(A \setminus B) = n(A) - n(A \cap B)$

এবং (2) নং থেকে পাই, $n(B \setminus A) = n(B) - n(A \cap B)$

এখন, $n(A \setminus B)$ এবং $n(B \setminus A)$ (3) এ বসিয়ে পাই,

$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B) + n(A \cap B)$

$\therefore \; n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

কাজ:

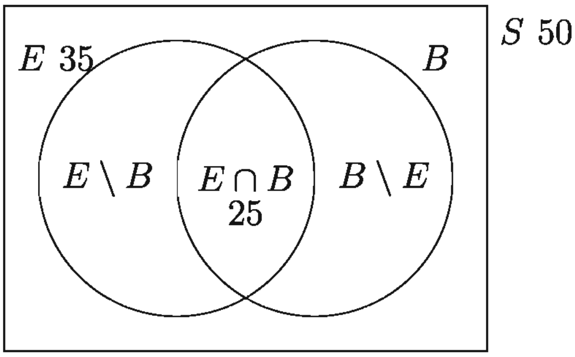
- ক) নিম্নোক্ত প্রত্যেক ক্ষেত্রে A ও B এর মধ্যে সম্ভাব্য সকল এক-এক মিল বর্ণনা কর:
  (১) $A = \{a, b\}, \; B = \{1, 2\}$ (২) $A = \{a, b, c\}, \; B = \{a, b, c\}$
- খ) ক নং প্রশ্নে বর্ণিত প্রত্যেক এক-এক মিলকরণের জন্য $F = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$ এবং $x \leftrightarrow y$ সেটটি তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা কর।
- গ) মনে করি $A = \{a, b, c, d\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4\}$। $A \times B$ এর একটি উপসেট F বর্ণনা কর যার অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম পদের সঙ্গে দ্বিতীয় পদের মিল করা হলে, A ও B এর একটি এক-এক মিল স্থাপিত হয় যেখানে, $a \leftrightarrow 3$।
- ঘ) দেখাও যে, $A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ ও $B = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}\}$ সেট দুইটি সমতুল।
- ঙ) দেখাও যে, $S = \{3^n : n = 0$ অথবা $n \in N\}$ সেটটি N এর সমতুল।
- চ) ঠিক উপরের প্রশ্নে বর্ণিত সেট S এর একটি প্রকৃত উপসেট বর্ণনা কর যা S এর সমতুল।
- ছ) দেখাও যে, সকল বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $A = \{1, 3, 5, 7, \cdots\}$ অনন্ত সেট।

বাস্তব সমস্যা সমাধানে সেট

বাস্তব সমস্যা সমাধানে ভেনচিত্র ব্যবহার করা হয়। এখানে উল্লেখ্য যে, প্রতি সেটের উপাদান সংখ্যা ভেনচিত্রে লেখা হবে, তা কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে দেখানো হলো।

উদাহরণ ১৫. 50 জন লোকের মধ্যে 35 জন ইংরেজি বলতে পারে, 25 জন ইংরেজি ও বাংলা বলতে পারে এবং প্রত্যেকেই দুইটি ভাষার অন্তত একটি বলতে পারে। বাংলা বলতে পারে কতজন? কেবল মাত্র বাংলা বলতে পারে কতজন?

সমাধান: মনে করি, সকল লোকের সেট S এবং তাদের মধ্যে যারা ইংরেজি বলতে পারে তাদের সেট E, যারা বাংলা বলতে পারে তাদের সেট B।



তাহলে প্রশ্নানুসারে, $n(S) = 50,\ n(E) = 35,\ n(E \cap B) = 25$ এবং $S = E \cup B$। মনে করি, $n(B) = x$।

তাহলে, $n(S) = n(E \cup B) = n(E) + n(B) - n(E \cap B)$ থেকে পাই,

$50 = 35 + x - 25$ বা, $x = 50 - 35 + 25 = 40$ অর্থাৎ, $n(B) = 40$

$\therefore$ বাংলা বলতে পারে 40 জন।

এখন, যারা কেবলমাত্র বাংলা বলতে পারে, তাদের সেট হচ্ছে $(B \setminus E)$।

মনে করি, $n(B \setminus E) = y$।

যেহেতু $E \cap B$ এবং $(B \setminus E)$ নিশ্ছেদ এবং $B = (E \cap B) \cup (B \setminus E)$ [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]

সুতরাং $n(B) = n(E \cap B) + n(B \setminus E)$।

$\therefore$ $40 = 25 + y$ বা, $y = 40 - 25 = 15$ অর্থাৎ, $n(B \setminus E) = 15$

$\therefore$ কেবলমাত্র বাংলা বলতে পারে 15 জন।

অতএব, বাংলা বলতে পারে 40 জন এবং কেবলমাত্র বাংলা বলতে পারে 15 জন।

উদাহরণ ১৬. একটি শ্রেণির 35 জন বালিকার প্রত্যেকে দৌড়, সাঁতার ও নাচের কমপক্ষে যেকোনো একটি পছন্দ করে। তাদের মধ্যে 15 জন দৌড়, 4 জন সাঁতার, দৌড় ও নাচ, 2 জন শুধু দৌড়, 7 জন দৌড় ও সাঁতার পছন্দ করে কিন্তু নাচ নয়। x জন সাঁতার ও নাচ কিন্তু দৌড় নয়, $2x$ জন শুধু নাচ, 2 জন শুধু সাঁতার পছন্দ করে।

ক) এ তথ্যগুলো ভেনচিত্রে দেখাও।

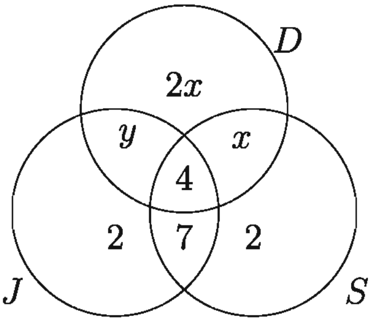
খ) x নির্ণয় কর।

গ) সেটের মাধ্যমে ব্যাখ্যা কর: যে সমস্ত বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার নয়।

ঘ) কতজন বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না?

সমাধান:

ক) ধরি, সেট $J =$ যারা দৌড় পছন্দ করে, $S =$ যারা সাঁতার পছন্দ করে, $D =$ যারা নাচ পছন্দ করে। এবার নিচের ভেনচিত্র লক্ষ করি।



খ) ভেনচিত্র হতে $J' =$ {যে সব বালিকা দৌড় পছন্দ করে না}।

অর্থাৎ $n(J') = 35 - 15 = 20$ বা, $2x + x + 2 = 20$ বা, $3x = 18$ বা $x = 6$।

গ) যে সব বালিকা দৌড় ও নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না: $J \cap D \cap S'$।

ঘ) ভেনচিত্রে $n(J \cap D \cap S') = y$ এবং দেওয়া আছে $n(J) = 15$।

$\therefore\ y + 4 + 7 + 2 = 15$ বা $y = 2$।

শুধু 2 জন বালিকা দৌড় এবং নাচ পছন্দ করে কিন্তু সাঁতার পছন্দ করে না।

উদাহরণ ১৭. 24 জন ছাত্রের 18 জন বাস্কেটবল খেলা পছন্দ করে, 12 জন ভলিবল খেলা পছন্দ করে। দেওয়া আছে, $U =$ শ্রেণির ছাত্রদের সেট, $B =$ বাস্কেটবল খেলা পছন্দ করে এমন ছাত্রের সেট, $V =$ ভলিবল খেলা পছন্দ করে এমন ছাত্রদের সেট। মনে কর $n(B \cap V) = x$ এবং ভেনচিত্রে নিচের তথ্যগুলো ব্যাখ্যা কর:

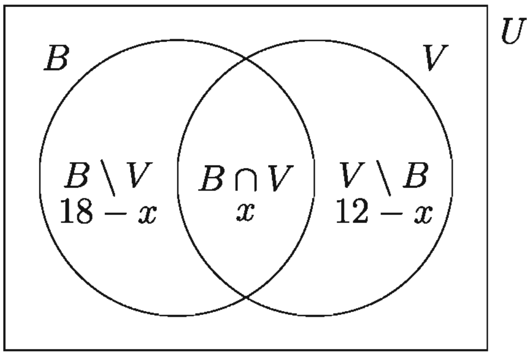
ক) $B \cup V$ সেটের বর্ণনা দাও এবং $n(B \cup V)$ কে x এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) x এর সম্ভাব্য ন্যূনতম মান নির্ণয় কর।

গ) x এর সম্ভাব্য বৃহত্তম মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) $B \cup V$ হলো এমন সব ছাত্রের সেট যারা বাস্কেটবল বা ভলিবল খেলা পছন্দ করে।



$n(B \cup V) = (18 - x) + x + (12 - x) = 30 - x$

খ) x বা $n(B \cap V)$ ক্ষুদ্রতম যখন $B \cup V = U$

অর্থাৎ $n(B \cup V) = n(U)$ বা $30 - x = 24$ বা $x = 6$

$\therefore$ সম্ভাব্য ক্ষুদ্রতম মান $x = 6$।

গ) $n(B \cap V)$ বৃহত্তম যখন $V \subset B$

তখন, $n(B \cap V) = n(V)$ বা $x = 12$

$\therefore$ সম্ভাব্য বৃহত্তম মান $x = 12$।

কাজ:

ক) কোনো শ্রেণির 30 জন ছাত্রের 20 জন ফুটবল এবং 15 জন দাবা পছন্দ করে। প্রত্যেক ছাত্র দুইটি খেলার অন্তত যেকোনো একটি খেলা পছন্দ করে। কতজন ছাত্র দুইটি খেলাই পছন্দ করে?

খ) কিছু সংখ্যক লোকের মধ্যে 50 জন বাংলা, 20 জন ইংরেজি এবং 10 জন বাংলা ও ইংরেজি বলতে পারে। দুইটি ভাষার অন্তত একটি ভাষা কতজন বলতে পারে?

গ) ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের আধুনিক ভাষা ইনস্টিটিউটের 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 42 জন ফ্রেঞ্চ, 30 জন জার্মান, 28 জন স্প্যানিশ নিয়েছে। 10 জন নিয়েছে ফ্রেঞ্চ ও স্প্যানিশ, 8 জন নিয়েছে জার্মান ও স্প্যানিশ, 5 জন নিয়েছে জার্মান ও ফ্রেঞ্চ, 3 জন তিনটি ভাষাই নিয়েছে।

(১) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার একটিও নেয়নি?

(২) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল একটি ভাষা নিয়েছে?

(৩) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল দুইটি ভাষা নিয়েছে?

ঘ) কোনো মাদ্রাসার নবম শ্রেণির বিজ্ঞান শাখার 50 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 29 জন জীববিজ্ঞান, 24 জন উচ্চতর গণিত এবং 11 জন জীববিজ্ঞান ও উচ্চতর গণিত উভয় বিষয় নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী জীববিজ্ঞান বা উচ্চতর গণিত বিষয় দুইটির কোনটিই নেয়নি?

অনুশীলনী ১.১

১. (i) কোন সেটের সদস্য সংখ্যা $2n$ হলে, এর উপসেটের সংখ্যা হবে 4^n।

(ii) সকল মূলদ সংখ্যার সেট $Q = \left\{\frac{p}{q} : \ p, q \in Z\right\}$।

(iii) $a, b \in R; (a, b) = \{x : x \in R$ এবং $a < x < b\}$।

উপরের উক্তিগুলোর আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) ii ও iii গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

প্রত্যেক $n \in N$ এর জন্য $A_n = \{n, 2n, 3n, \cdots\}$ হলে (২ - ৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

২. $A_1 \cap A_2$ এর সমান নিচের কোনটি?

ক) A_1 খ) A_2 গ) A_3 ঘ) A_4

৩. নিচের কোনটি $A_3 \cap A_6$ এর সমান?

ক) A_2 খ) A_3 গ) A_4 ঘ) A_6

৪. $A_2 \cap A_3$ এর পরিবর্তে নিচের কোনটি লেখা যায়?

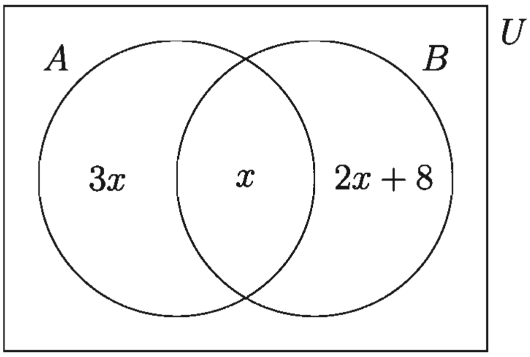
ক) A_3 খ) A_4 গ) A_5 ঘ) A_6

৫. দেওয়া আছে $U = \{x : 1 \leq x \leq 20, \ x \in Z\}$, $A = \{x : x$ বিজোড় সংখ্যা$\}$ এবং $B = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$। নিম্নের সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লিপিবদ্ধ কর:

ক) A খ) B

গ) $C = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$ ঘ) $D = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$

৬. ভেনচিত্রে A ও B সেটের উপাদানগুলোর সংখ্যা দেখানো হয়েছে। যদি $n(A) = n(B)$ হয়, তবে নির্ণয় কর ক) x এর মান খ) $n(A \cup B)$ গ) $n(B \setminus A)$।



৭. যদি $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা$\}$, $A = \{x : x \geq 5\} \subset U$ এবং $B = \{x : 5x < 12\} \subset U$ তবে $n(A \cap B)$ এবং $n(A' \cup B)$ এর মান নির্ণয় কর।

৮. যদি $U = \{x : x$ জোড় পূর্ণসংখ্যা$\}$, $A = \{x : 3x \geq 25\} \subset U$ এবং $B = \{x : 5x < 12\} \subset U$ হয়, তাহলে $n(A \cap B)$ এবং $n(A' \cap B')$ এর মান নির্ণয় কর।

৯. দেখাও যে, ক) $A \setminus A = \varnothing$ খ) $A \setminus (A \setminus A) = A$।

১০. দেখাও যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$।

১১. যদি $A \subset B$ এবং $C \subset D$ হয়, তবে দেখাও যে, $(A \times C) \subset (B \times D)$।

১২. দেখাও যে, $A = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ এবং $B = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^{n-1}\}$ সেট দুইটি সমতুল।

১৩. দেখাও যে, স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের বর্গের সেট $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, \cdots\}$ একটি অনন্ত সেট।

১৪. প্রমাণ কর যে, $n(A) = p,\ n(B) = q$ এবং $A \cap B = \varnothing$ হলে, $n(A \cup B) = p + q$।

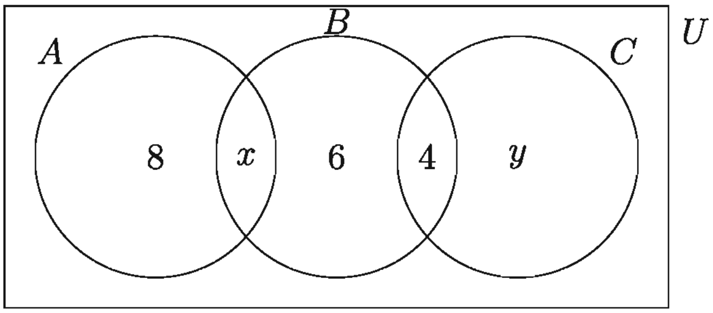
১৫. প্রমাণ কর যে, A, B, C সান্ত সেট হলে, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$।

১৬. $A = \{a, b, x\}$ এবং $B = \{c, y\}$ সার্বিক সেট $U = \{a, b, c, x, y, z\}$ এর উপসেট হলে,

- ক) যাচাই কর যে, $(i)\ A \subset B'$ $(ii)\ A \cup B' = B'$ $(iii)\ A' \cap B = B$।
- খ) নির্ণয় কর: $(A \cap B) \cup (A \cap B')$।

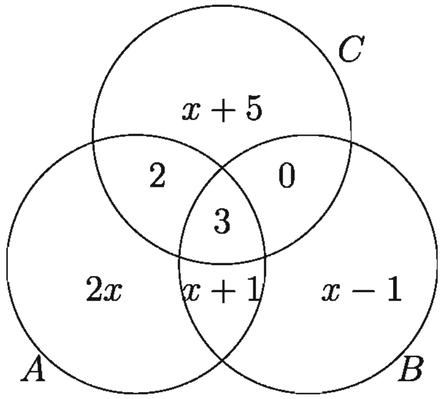
১৭. কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 3 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি?

১৮. নিচের ভেনচিত্রে সার্বিক সেট $U = A \cup B \cup C$।



- ক) যদি $n(A \cap B) = n(B \cap C)$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।
- খ) যদি $n(B \cap C') = n(A' \cap C)$ হয়, তবে y এর মান নির্ণয় কর।
- গ) $n(U)$ এর মান নির্ণয় কর।

১৯. নিচের ভেনচিত্রে $U = A \cup B \cup C$ এবং $n(U) = 50$।



ক) x এর মান নির্ণয় কর।

খ) $n(B\cap C')$ এবং $n(A'\cap B)$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) $n(A\cap B\cap C')$ এর মান নির্ণয় কর।

২০. তিনটি সেট A, B এবং C এমনভাবে দেওয়া আছে যেন, $A\cap B=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$ এবং $C\subset B$। ভেনচিত্র অঙ্কন করে সেটগুলোর ব্যাখ্যা দাও।

২১. দেওয়া আছে $A=\{x:2<x\leq 5,\ x\in R\}$, $B=\{x:1\leq x<3, x\in R\}$ এবং $C=\{2,4,5\}$। নিম্নের সেটগুলো সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

ক) $A\cap B$ খ) $A'\cap B'$ গ) $A'\cup B$

২২. দেওয়া আছে $U=\{x:x<10, x\in R\}$, $A=\{x:1<x\leq 4\}$ এবং $B=\{x:3\leq x<6\}$। নিচের সেটগুলো সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

ক) $A\cap B$ খ) $A'\cap B$ গ) $A\cap B'$ ঘ) $A'\cap B'$

২৩. নিম্নে প্রতিক্ষেত্রে A ও B সেট দেওয়া আছে, $A\cup B$ নির্ণয় কর এবং যাচাই কর যে $A\subset(A\cup B)$ এবং $B\subset(A\cup B)$।

ক) $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ এবং $B=\{-3,0,3\}$

খ) $A=\{x:x\in N,\ x<10$ এবং $x, 2$ এর গুণিতক$\}$ এবং $B=\{x:x\in N,\ x<10$ এবং $x, 3$ এর গুণিতক$\}$

২৪. নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে $A\cap B$ নির্ণয় কর এবং যাচাই কর যে, $(A\cap B)\subset A$ এবং $(A\cap B)\subset B$।

ক) $A=\{0,1,2,3\}$, $B=\{-1,0,2\}$ খ) $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{b,x,c,y\}$

২৫. আলিয়া মাদ্রাসার ছাত্রদের মধ্যে বিচিত্রা, সন্ধানী ও পূর্বাণী পত্রিকার পাঠ্যাভ্যাস সম্পর্কে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল 60% ছাত্র বিচিত্রা, 50% ছাত্র সন্ধানী, 50% ছাত্র পূর্বাণী, 30% ছাত্র বিচিত্রা ও সন্ধানী, 30% ছাত্র বিচিত্রা ও পূর্বাণী, 20% ছাত্র সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং 10% ছাত্র তিনটি পত্রিকাই পড়ে।

ক) শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকা তিনটির কোনটিই পড়ে না?

খ) শতকরা কতজন ছাত্র উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুইটি পড়ে?

২৬. $A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - (a+b)x + ab = 0\}$, $B = \{1, 2\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$

ক) A সেটের উপাদানসমূহ নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে, $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$।

গ) প্রমাণ কর যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$।

২৭. একটি শ্রেণির 100 জন ছাত্রের মধ্যে 42 জন ফুটবল, 46 জন ক্রিকেট এবং 39 জন দাবা খেলে। এদের মধ্যে 13 জন ফুটবল ও ক্রিকেট, 14 জন ক্রিকেট ও দাবা এবং 12 জন ফুটবল ও দাবা খেলতে পারে। এছাড়া 7 জন কোনো খেলায় পারদর্শী নয়।

ক) উল্লিখিত তিনটি খেলায় পারদর্শী এমন ছাত্রদের সেট এবং কোনো খেলায় পারদর্শী নয় এমন ছাত্রদের সেট ভেনচিত্রে দেখাও।

খ) কতজন ছাত্র উল্লিখিত তিনটি খেলায়ই পারদর্শী তা নির্ণয় কর।

গ) কতজন ছাত্র কেবলমাত্র একটি খেলায় পারদর্শী? কতজন অন্তত দুইটি খেলায় পারদর্শী?

২৮. $P(\varnothing)$, $P(\{\varnothing\})$ সেট নির্ণয় কর।

২৯. এক গ্রামে এক মিস্ত্রী ছিল। সে তাদের ঘর তৈরি করতো যারা নিজেরা নিজেদের ঘর তৈরি করতো না। মিস্ত্রীর ঘর কে তৈরি করতো?

৩০. $A = \{x : x \notin A\}$। সেট A নিয়ে বিস্তৃত আলোচনা কর।

ফাংশন (Function)

অন্বয় (Relation)

অনেক সময় আমরা সেট X এর উপাদানগুলোর মধ্যে অথবা সেট X ও সেট Y এর উপাদানগুলোর মধ্যে বিভিন্ন সম্পর্ক বিবেচনা করি। যেমন, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N এ বড়-ছোট সম্পর্ক, কোনো পরিবারে ভাই-বোন সম্পর্ক, তোমার শ্রেণির শিক্ষার্থীদের সঙ্গে সর্বশেষ জন্মদিনে তাদের বয়সের সম্পর্ক। এ প্রসঙ্গে নবম-দশম শ্রেণির গণিত বই দ্রষ্টব্য।

উদাহরণ ১৮. মনে করি $A = \{0, 1, 2, 3\}$ একটি সেট। A সেটের উপাদানগুলোর মধ্যে $x < y$ সম্পর্কটিকে $A \times A$ এর উপসেট $S = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2)(1, 3), (2, 3)\}$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে S সেটের অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড় গুলোর (প্রথম অংশক) $<$ (দ্বিতীয় অংশক)। এক্ষেত্রে S হলো A সেটে বর্ণিত $<$ অন্বয়।

উদাহরণ ১৯. মনে করি কোনো পরিবারে a পিতা, b মাতা, c বড় ছেলে, d ছোট ছেলে, e মেয়ে, f বড় ছেলের স্ত্রী। পরিবারের সদস্যদের সেটকে F ধরে আমরা পাই $F = \{a, b, c, d, e, f\}$। F সেটে ভাই সম্পর্ক অর্থাৎ x হলো y এর ভাই সম্পর্কটিকে $B = \{(c, d), (c, e), (d, c), (d, e)\}$ দ্বারা বর্ণনা

করা যায়, যেখানে B সেটের অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশক হলো দ্বিতীয় অংশকের ভাই। B সেট হলো F সেটে ভাই অন্বয়।

সংজ্ঞা ৪ (অন্বয়). X ও Y সেট হলে এদের কার্তেসীয় গুণজ সেট $X \times Y$ এর যেকোনো উপসেটকে X হতে Y এ একটি **অন্বয়** বলা হয়। অর্থাৎ $R \subseteq X \times Y$ হলো X হতে Y এ বর্ণিত অন্বয়।

কাজ: Z সেটে "x হলো y এর বর্গ" অন্বয়টিকে ক্রমজোড়ের সেট রূপে বর্ণনা কর।

ফাংশন (Function)

সেটের মতো ফাংশনের ধারণাও গণিতে একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। ব্যবহারিক প্রয়োজনে দুইটি চলক অথবা দুইটি সেটের মধ্যে সম্পর্ক বিবেচনা করা হয়।

উদাহরণ ২০. বৃত্তের ব্যাসার্ধ ও পরিসীমার মধ্যে যে সম্পর্ক তাকে $p = 2\pi r$ লিখে প্রকাশ করা হয় যেখানে r চলক বৃত্তের ব্যাসার্ধ ও p চলক বৃত্তের পরিসীমা নির্দেশ করে। এখানে r এর প্রত্যেক সম্ভাব্য মানের জন্য p এর একটি ও কেবল একটি মান নির্দিষ্ট হয়। আমরা বলি, p চলক r চলকের একটি ফাংশন এবং লিখি $p = f(r)$, যেখানে $f(r) = 2\pi r$।

এই ফাংশনীয় সম্পর্কটি দ্বারা r এর ব্যাপ্তি সেট X থেকে p এর ব্যাপ্তি সেট Y এ একটি ফাংশন সংজ্ঞায়িত হয়েছে বলেও ধরা হয়। এই ফাংশনকে X থেকে Y তে বর্ণিত অন্বয় $\{(r,p) : r \in X$ এবং $p \in Y$ ও $p = 2\pi r\}$ রূপেও বিবেচনা করা হয়। অন্বয়ের ধারণা নবম-দশম শ্রেণির গণিত বইএ ব্যাখ্যা করা হয়েছে।

সংজ্ঞা ৫ (ফাংশন). যদি X ও Y সেট হয় এবং কোনো নিয়মের অধীনে X সেটের প্রত্যেক উপাদানের সঙ্গে Y সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদানকে সংশ্লিষ্ট করা হয় তবে ঐ নিয়মকে X থেকে Y এ বর্ণিত একটি **ফাংশন** বলা হয়। এরূপ ফাংশনকে f, g, F, G ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা নির্দেশ করা হয়।

সংজ্ঞা ৬ (ডোমেন ও কোডোমেন). যদি X সেট হতে Y সেটে f একটি ফাংশন হয়, তবে তাকে $f : X \to Y$ লিখে প্রকাশ করা হয়। X সেটকে $f : X \to Y$ ফাংশনের **ডোমেন (domain)** এবং Y সেটকে এর **কোডোমেন (codomain)** বলা হয়।

সংজ্ঞা ৭ (প্রতিবিম্ব ও প্রাক প্রতিবিম্ব). যদি $f : X \to Y$ ফাংশনের অধীনে $x \in X$ এর সাথে $y \in Y$ সংশ্লিষ্ট হয়, তবে এই ফাংশনের অধীনে y কে x এর **প্রতিবিম্ব বা ইমেজ (image)** এবং x কে y এর **প্রাক প্রতিবিম্ব (preimage)** বলা হয় এবং $y = f(x)$ লিখে তা প্রকাশ করা হয়।

সংজ্ঞা ৮ (রেঞ্জ). $f : X \to Y$ ফাংশনের অধীনে Y এর যে সকল উপাদান X এর কোনো উপাদানের ইমেজ হয়, এদের সেটকে f ফাংশনের **রেঞ্জ (range)** বলা হয় এবং "রেঞ্জ f" দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ রেঞ্জ $f = \{y : y = f(x)$ যেখানে $x \in X\} = \{f(x) : x \in X\}$। লক্ষণীয় যে রেঞ্জ f কোডোমেন Y এর উপসেট।

ফাংশনকে বিভিন্নভাবে বর্ণনা করা যায়। নিচের উদাহরণগুলো লক্ষ কর।

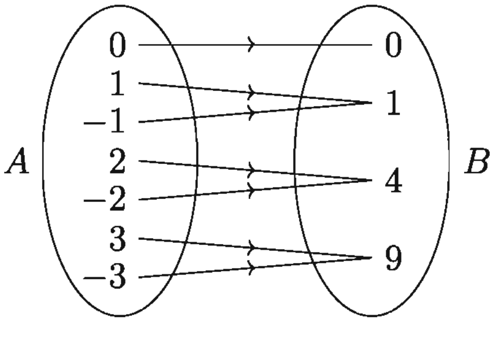
উদাহরণ ২১. $f : x \to 2x + 1,\ x \in Z$; পূর্ণ সংখ্যার সেট Z হতে Z এ একটি ফাংশন বর্ণনা করে। এই ফাংশনের অধীনে পূর্ণসংখ্যা x এর প্রতিবিম্ব $y = f(x) = 2x + 1$; ফাংশনটির ডোমেন, ডোম $f = Z$ এবং ফাংশনটির রেঞ্জ, রেঞ্জ $f = \{y : y = 2x + 1,\ x \in Z\}$ সকল বিজোড় পূর্ণসংখ্যার সেট।

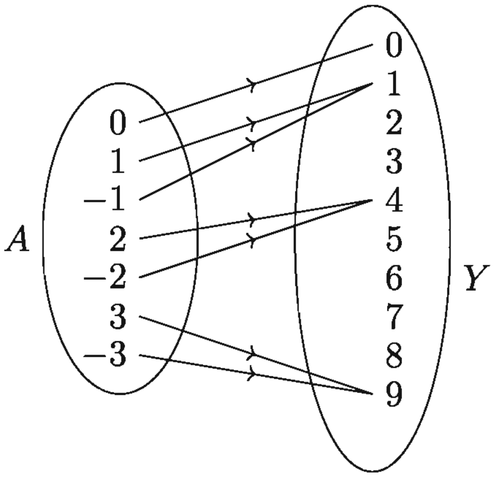
উদাহরণ ২২. ক্রমজোড়ের সেট $F = \{(0,0),(1,1),(-1,1),(2,4),(-2,4),(3,9),(-3,9)\}$ একটি ফাংশন বর্ণনা করে, যার ডোমেন হলো F এর অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশকগুলোর সেট এবং রেঞ্জ হলো F এর অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর দ্বিতীয় অংশকগুলোর সেট।

অর্থাৎ ডোম $F = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$ এবং রেঞ্জ $F = \{0, 1, 4, 9\}$

একটু লক্ষ করলে এক্ষেত্রে দেখা যাবে যে F এর অধীনে $x \in$ ডোম F এর প্রতিবিম্ব $F(x) = x^2$। উল্লেখ্য যে, একটি ক্রমজোড়ের সেট কেবল তখনই একটি ফাংশন বর্ণনা করে যখন ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড়ের প্রথম অংশক ভিন্ন হয়।

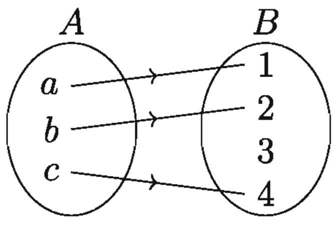
উদাহরণ ২৩. নিচে বর্ণিত ফাংশন F এর ডোমেনকে A ও রেঞ্জকে B ধরে ফাংশনটিকে চিত্র দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে A এর প্রত্যেক বিন্দু থেকে একটি ও কেবল একটি তীর চিহ্নিত রেখা আরম্ভ করে B সেটের একটি ও কেবল একটি বিন্দুতে শেষ হয়েছে (বামের চিত্র)। উল্লেখ্য যে, ফাংশনের কোডোমেন হিসেবে একটি সেট Y (যার উপসেট B) নিয়েও ফাংশনটিকে চিত্রিত করা যায় (ডানের চিত্র)।

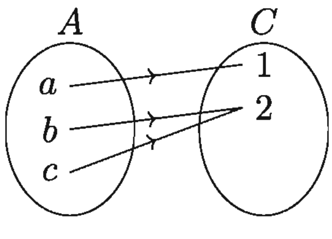


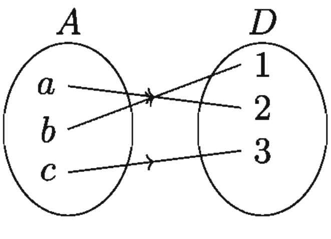


বিপরীত ফাংশন (Inverse Function)

নিচের তিনটি চিত্রে তিনটি ফাংশন বর্ণনা করা হয়েছে।







ক) উপরের বামের চিত্রের ফাংশনটির অধীনে $a \to 1, b \to 2, c \to 4$। এই ফাংশনটি এক-এক কিন্তু সার্বিক নয় কেননা 3 এর কোনো প্রাক প্রতিবিম্ব নেই।

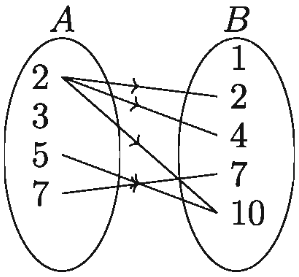
খ) উপরের মাঝের চিত্রের ফাংশনটির অধীনে $a \to 1, b \to 2, c \to 2$। এই ফাংশনটি সার্বিক কিন্তু এক-এক নয় কেননা b ও c এর প্রতিবিম্ব 2।

গ) উপরের ডানের চিত্রের ফাংশনটির অধীনে $a \to 2, b \to 1, c \to 3$। এই ফাংশনটি এক-এক ও সার্বিক। শেষোক্ত ক্ষেত্রে কোডোমেন D এর প্রত্যেক উপাদানের জন্য ডোমেন A এর একটি ও কেবল একটি উপাদান নির্দিষ্ট হয়েছে। ফলে, D হতে A তে একটি ফাংশন বর্ণিত হয়েছে, যেই ফাংশনকে প্রদত্ত ফাংশনের বিপরীত ফাংশন বলা হয়।

সংজ্ঞা ৯ (বিপরীত ফাংশন). মনে করি, $f : A \to B$ একটি এক-এক ও সার্বিক ফাংশন। একটি ফাংশন $g : B \to A$ বর্ণিত হয় যেখানে প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য $g(b) = a$ যদি ও কেবল যদি $f(a) = b$ হয়। এই ফাংশন g কে f এর **বিপরীত ফাংশন** বলা হয় এবং f^{-1} দ্বারা নির্দেশ করা হয় অর্থাৎ $g = f^{-1}$।

উপরের ডানের চিত্রে বর্ণিত ফাংশনটি f হলে $f^{-1} : D \to A$ এবং $f^{-1}(1) = b$, $f^{-1}(2) = a$, $f^{-1}(3) = c$। উপরের অন্য দুইটি চিত্রে বর্ণিত ফাংশন দুইটির বিপরীত ফাংশন সম্ভব নয়।

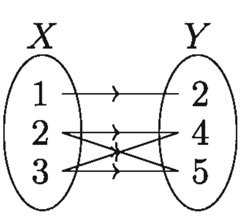
উদাহরণ ২৪. মনে করি, $A = \{2, 3, 5, 7\}$ এবং $B = \{1, 2, 4, 7, 10\}$। A এর যে যে সদস্য দ্বারা B এর যে যে সদস্য বিভাজ্য হয় এদেরকে নিচের চিত্রে তীর চিহ্নিত করে দেখানো হলো:

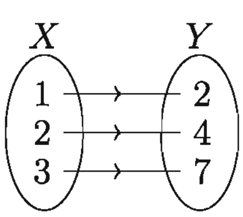


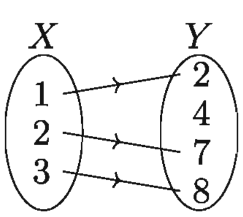
এখানে $D = \{(2, 2), (2, 4), (2, 10), (5, 10), (7, 7)\}$ এরূপ অন্বিত সদস্যদের দ্বারা গঠিত ক্রমজোড়গুলোর সেট, যা দ্বারা এই বিভাজ্যতা সম্পর্কটি বর্ণনা করা যায়। D সেটে অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশ A এর সদস্য ও দ্বিতীয় অংশ B এর সদস্য যেখানে প্রথম অংশ দ্বারা দ্বিতীয় অংশ বিভাজ্য। অর্থাৎ, $D \subset A \times B$ এবং $D = \{(x, y) : x \in A, y \in B$ এবং x দ্বারা y বিভাজ্য$\}$, এখানে D সেটটি A সেট থেকে B সেটে একটি অন্বয়।

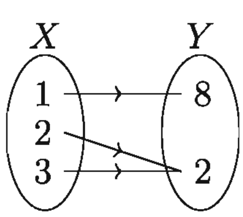
উদাহরণ ২৫. বাস্তব সংখ্যার ক্রমজোড়ের সেট $L = \{(x, y) : x \in R,\ y \in R$ এবং $x < y\}$ বিবেচনা করি। দুইটি বাস্তব সংখ্যা a, b এর জন্য $a < b$ যদি ও কেবল যদি $(a, b) \in L$ হয়। সুতরাং L সেট দ্বারা বাস্তব সংখ্যার ছোট-বড় সম্পর্ক বর্ণিত হয়।

উদাহরণ ২৬. নিচের কোন অন্বয়টি (relation) ফাংশন নয়? যুক্তি দাও।









সমাধান: উপরের বাম পাশের সম্পর্কটি ফাংশন নয় কারণ $2 \to 4$, $2 \to 5$ এবং $3 \to 4$, $3 \to 5$। বাকি তিনটি সম্পর্কই ফাংশন।

উদাহরণ ২৭. $f : x \to 2x^2 + 1$ ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় কর যেখানে ডোমেন $X = \{1, 2, 3\}$।

সমাধান: $f(x) = 2x^2 + 1$ যেখানে $x \in X$।

$f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3, f(2) = 2(2)^2 + 1 = 9$ এবং $f(3) = 2(3)^2 + 1 = 19$।

$\therefore \{1, 2, 3\}$ এর রেঞ্জ সেট $= \{3, 9, 19\}$।

উদাহরণ ২৮. $f : x \to mx + c$ ফাংশনের জন্য 2 এবং 4 এর প্রতিবিম্ব যথাক্রমে 7 ও -1। তাহলে নির্ণয় কর:

ক) m এবং c এর মান।

খ) f এর অধীনে 5 এর প্রতিবিম্ব।

গ) f এর অধীনে 3 এর প্রাক প্রতিবিম্ব।

সমাধান:

ক) $f(x) = mx + c$ এ দেওয়া আছে

$f : 2 \to 7$ অর্থাৎ $f(2) = 7$ বা, $2m + c = 7 \cdots\cdots (1)$

$f : 4 \to -1$ অর্থাৎ $f(4) = -1$ বা, $4m + c = -1 \cdots\cdots (2)$

(1) ও (2) থেকে পাই $m = -4$ এবং $c = 15$

খ) f এর অধীনে 5 এর প্রতিবিম্ব $f(5) = -4 \times 5 + 15 = -5$

গ) 3 এর প্রাক প্রতিবিম্ব x হলে $f(x) = 3$ অর্থাৎ $-4x + 15 = 3$ বা $x = 3$

কাজ: $F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ অন্বয়টি কী ফাংশন? এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। সম্ভব হলে F এর জন্য একটি সূত্র নির্ণয় কর।

মন্তব্য: কোনো ফাংশন F এর ডোমেন এবং ডোমেনের প্রত্যেক সদস্য x এর অনন্য প্রতিবিম্ব $F(x)$ নির্দিষ্ট করা হলেই ফাংশনটি নির্ধারিত হয়। অনেক সময় ডোমেন উহ্য রাখা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে ডোমেন হিসেবে ঐ সেটকে গ্রহণ করা হয়, যার প্রত্যেক উপাদানের জন্য $F(x)$ নির্ধারিত থাকে।

উদাহরণ ২৯. $F(x) = \sqrt{1 - x}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর। $F(-3)$, $F(0)$, $F\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $F(1)$, $F(2)$ এর মধ্যে যেগুলো সংজ্ঞায়িত সেগুলো নির্ণয় কর।

সমাধান: $F(x) = \sqrt{1 - x} \in R$ যদি ও কেবল যদি $1 - x \geq 0$ বা $1 \geq x$ অর্থাৎ, $x \leq 1$

সুতরাং ডোম $F = \{x : x \in R$ এবং $x \leq 1\}$

এখানে $F(-3) = \sqrt{1-(-3)} = \sqrt{4} = 2$

$F(0) = \sqrt{1-0} = \sqrt{1} = 1$

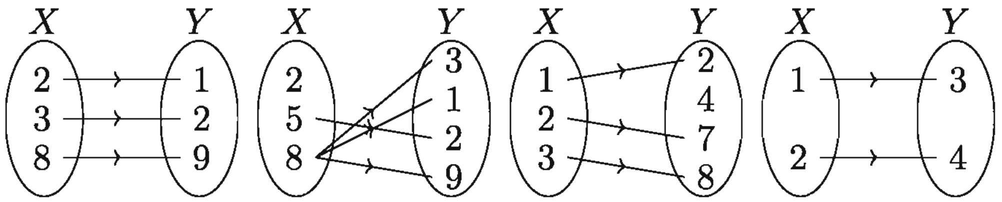
$F\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$F(1) = \sqrt{1-1} = 0$

$F(2)$ সংজ্ঞায়িত নয়, কেননা $2 \notin$ ডোম F।

কাজ:

ক) নিচের কোন অন্বয়টি ফাংশন নয়? যুক্তি দাও।



খ) $f : x \to 4x+2$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশন যার ডোমেন $D = \{-1, 3, 5\}$। ফাংশনটির রেঞ্জ সেট নির্ণয় কর।

গ) প্রদত্ত S অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা কর এবং কোনগুলো ফাংশন তা নির্ধারণ কর। ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয় কর, যেখানে $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$।

(১) $S = \{(x, y) : x \in A,\ y \in A$ এবং $x + y = 1\}$

(২) $S = \{(x, y) : x \in A,\ y \in A$ এবং $x - y = 1\}$

(৩) $S = \{(x, y) : x \in A,\ y \in A$ এবং $y = x^2\}$

(৪) $S = \{(x, y) : x \in A,\ y \in A$ এবং $y^2 = x\}$

ঘ) $F(x) = 2x - 1$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

(১) $F(-2), F(0)$, এবং $F(2)$ নির্ণয় কর।

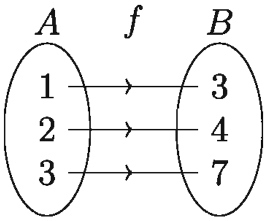
(২) $F\left(\frac{a+1}{2}\right)$ নির্ণয় কর, যেখানে $a \in R$।

(৩) $F(x) = 5$ হলে x নির্ণয় কর।

(৪) $F(x) = y$ হলে x নির্ণয় কর, যেখানে $y \in R$।

এক-এক ফাংশন (One-One Function)

নিচের ভেনচিত্রে f ফাংশনের অধীনে ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিবিম্ব সর্বদা ভিন্ন।



সংজ্ঞা ১০ (এক-এক ফাংশন). যদি কোন ফাংশন f এর অধীনে এর ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিবিম্ব সর্বদা ভিন্ন হয়, তবে ফাংশনটিকে এক-এক (one-one) ফাংশন বলা হয়। অর্থাৎ $x_1, x_2 \in$ ডোম f এবং $x_1 \neq x_2$ হলে $f(x_1) \neq f(x_2)$।

উপরের সংজ্ঞা থেকে দেখা যায়, একটি ফাংশন $f : A \to B$ এক-এক ফাংশন হবে, যদি ও কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয় যেখানে $x_1, x_2 \in A$।

উদাহরণ ৩০. $f(x) = 3x + 5,\ x \in R$ ফাংশনটি কি এক-এক ফাংশন?

সমাধান: মনে করি $a, b \in R$ এবং $f(a) = f(b)$।

তাহলে $3a + 5 = 3b + 5$ বা, $3a = 3b$ বা, $a = b$।

সুতরাং f ফাংশনটি এক-এক।

উদাহরণ ৩১. দেখাও যে, $F : R \to R,\ F(x) = x^2$ ফাংশনটি এক-এক নয়।

সমাধান: $x_1 = -1, x_2 = 1$ নিয়ে দেখি যে, $x_1 \in$ ডোম $F, x_2 \in$ ডোম F এবং $x_1 \neq x_2$।

কিন্তু $F(x_1) = F(-1) = (-1)^2 = 1, F(x_2) = F(1) = (1)^2 = 1$।

অর্থাৎ $F(x_1) = F(x_2), \therefore\ F$ এক-এক নয়।

দ্রষ্টব্য: কোনো ফাংশনের বিপরীত অন্বয় ফাংশন নাও হতে পারে।

উদাহরণ ৩২. $f(x) = \dfrac{x}{x-2},\ x \neq 2$ বর্ণিত ফাংশনের জন্য নির্ণয় কর:
ক) $f(5)$ খ) $f^{-1}(2)$

সমাধান:

ক) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}, x \neq 2$

$$\therefore\ f(5) = \frac{5}{5-2} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

খ) ধরি, $a = f^{-1}(2)$ তাহলে $f(a) = 2$

$$\implies \frac{a}{a-2} = 2 \implies a = 2a - 4 \implies a = 4$$

$$\therefore\ f^{-1}(2) = 4$$

উদাহরণ ৩৩. $f(x) = 3x + 1,\ 0 \leq x \leq 2$

ক) f এর রেঞ্জ নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে f এক-এক ফাংশন।

গ) f^{-1} নির্ণয় কর এবং f ও f^{-1} এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান:

ক) $f(x) = 3x + 1,\ 0 \leq x \leq 2$ হতে পাই প্রান্ত বিন্দুদ্বয় $(0, 1)$ এবং $(2, 7)$

$\therefore$ রেঞ্জ $f : R = \{y : 1 \leq y \leq 7\}$

খ) যেহেতু প্রত্যেক $y \in R$ এর জন্য একমাত্র $x \in \{0 \leq x \leq 2\}$ এর ইমেজ y দেখানো হয়েছে। সুতরাং f এক-এক ফাংশন।

গ) ধরি, $y = f(x)$, x এর ইমেজ।

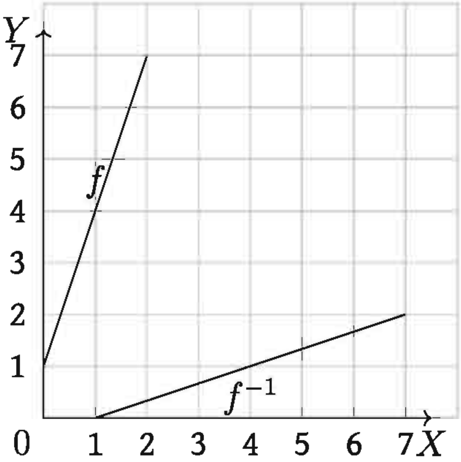
তাহলে, $y = 3x + 1 \implies x = \frac{1}{3}(y-1)$ যা লেখচিত্রে দেখানো হয়েছে।

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \to x$ যেখানে, $x = \frac{1}{3}(y-1)$

বা, $f^{-1} : y \to \frac{1}{3}(y-1)$ যা চিত্রে দেখানো হয়েছে।

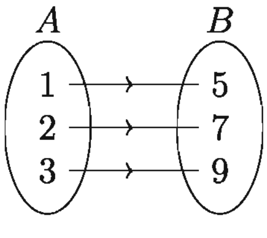
y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই, $f^{-1} : x \to \frac{1}{3}(x-1)$

f^{-1} এর অঙ্কিত রেখা $y = \frac{1}{3}(x-1),\ 1 \leq x \leq 7$ দেখানো হয়েছে।



সার্বিক ফাংশন (Onto Function)

চিত্রে ফাংশন f এর অধীনে সেট $A = \{1, 2, 3\}$ এবং $B = \{5, 7, 9\}$ বিবেচনা করি যেখানে $1 \to 5,\ 2 \to 7$ এবং $3 \to 9$ অর্থাৎ B এর প্রত্যেক উপাদান A সেটের একটি উপাদানের প্রতিবিম্ব। এইরূপ ফাংশনকে **সার্বিক ফাংশন** বলা হয়।



সংজ্ঞা ১১ (সার্বিক ফাংশন). একটি ফাংশন $f : A \to B$ কে **সার্বিক ফাংশন** (onto function) বলা হবে যদি প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি $a \in A$ পাওয়া যায় যেন $f(a) = b$ হয়। অর্থাৎ B = রেঞ্জ f।

উদাহরণ ৩৪. যদি $f : R \to R$ এবং $g : R \to R$ ফাংশন দুইটি $f(x) = x + 5$ এবং $g(x) = x - 5$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখাও যে, f এর বিপরীত ফাংশন g।

সমাধান: f ফাংশনটি এক-এক, কেননা

$f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 + 5 = x_2 + 5$ বা, $x_1 = x_2$।

আবার, f ফাংশনটি সার্বিক, কেননা

$y = f(x)$ হলে $x + 5 = y$ বা, $x = y - 5 \in R$।

সুতরাং বিপরীত ফাংশন f^{-1} বিদ্যমান।

$f^{-1}(x) = y$ হলে $f(y) = x$ বা, $y + 5 = x$ বা, $y = x - 5$

আবার, $f^{-1}(x) = x - 5 = g(x)$

f^{-1} ও g উভয়ের ডোমেন একই হওয়ায় $f^{-1} = g$

কাজ:

ক) নিম্নের প্রতিটি এক-এক ফাংশনের জন্য সংশ্লিষ্ট f^{-1} নির্ণয় কর, যদি বিদ্যমান হয়।

(১) $f(x) = \dfrac{3}{x-1},\ x \neq 1$ (২) $f(x) = \dfrac{2x}{x-2},\ x \neq 2$

(৩) $f : x \to \dfrac{2x+3}{2x-1},\ x \neq \dfrac{1}{2}$

খ) বর্ণিত ফাংশন $f(x) = \dfrac{4x-9}{x-2},\ x \neq 2$ এর ক্ষেত্রে যদি f^{-1} বিদ্যমান হয় তবে

(১) $f^{-1}(-1)$ এবং $f^{-1}(1)$ নির্ণয় কর।

(২) x এর মান নির্ণয় কর যেন $4f^{-1}(x) = x$

গ) বর্ণিত ফাংশন $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1},\ x \neq 1$ এর জন্য যদি f^{-1} বিদ্যমান হয় তবে

(১) $f^{-1}(3)$ নির্ণয় কর।

(২) $f^{-1}(p) = kp,\ p$ এর সাপেক্ষে k কে প্রকাশ কর।

ঘ) নিম্নোক্ত প্রত্যেক ক্ষেত্রে প্রদত্ত সম্পর্ক F একটি ফাংশন কিনা তা নির্ণয় কর। F ফাংশন হলে উহার ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর, উহা এক-এক কিনা তাও নির্ধারণ কর:

(১) $F = \{(x,y) \in R^2 : y = x\}$ (২) $F = \{(x,y) \in R^2 : y = x^2\}$

(৩) $F = \{(x,y) \in R^2 : y^2 = x\}$ (৪) $F = \{(x,y) \in R^2 : y = \sqrt{x}\}$

ঙ) যদি $f : \{-2,-1,0,1,2\} \to \{-8,-1,0,1,8\}$ ফাংশনটি $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে দেখাও যে, f এক-এক এবং সার্বিক।

চ) $f : \{1,2,3,4\} \to R$ একটি ফাংশন যা $f(x) = 2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। দেখাও যে, f এক-এক ফাংশন কিন্তু সার্বিক ফাংশন নয়।

অন্বয় ও ফাংশনের লেখচিত্র

লেখচিত্র হলো ফাংশনের জ্যামিতিক উপস্থাপন। $y = f(x)$ লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য O বিন্দুতে পরস্পর ছেদী লম্ব দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' নেওয়া হয়। O কে **মূলবিন্দু**, XOX' কে x **অক্ষ** এবং YOY' কে y **অক্ষ** বলা হয়।

$y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য $a \leq x \leq b$ ব্যবধিতে স্বাধীন চলক x এবং অধীন চলক y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করতে হয়। অত:পর তালিকার সীমিত সংখ্যক বিন্দুগুলোকে xy সমতলে স্থাপন করতে হয়। প্রাপ্ত বিন্দুগুলোকে সরলরেখা অথবা বক্ররেখা দ্বারা যুক্ত করলে $y = f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র পাওয়া যায়। নবম-দশম শ্রেণির গণিতে লেখচিত্র সম্পর্কে প্রাথমিক ধারণা প্রদান করা হয়েছে। এখানে, সরলরৈখিক (Linear) ফাংশন, দ্বিঘাত (Quadratic) ফাংশন এবং বৃত্তের লেখচিত্র অঙ্কন সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে।

সরলরৈখিক ফাংশন

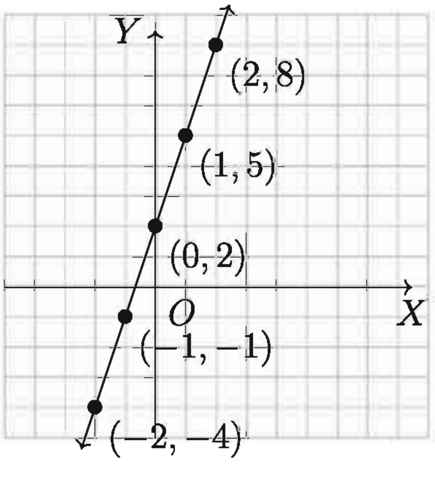
সরলরৈখিক ফাংশন এর সাধারণ রূপ হলো $f(x) = mx + b$ যেখানে, m এবং b বাস্তব সংখ্যা। এর লেখচিত্র একটি রেখা যার ঢাল হলো m এবং y অক্ষের ছেদক b।

এখানে, ধরি $m = 3$ এবং $b = 2$ তাহলে ফাংশনটি দাঁড়ায় $f(x) = 3x + 2$

বর্ণিত ফাংশন হতে x ও y এর নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায়:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	-1	2	5	8

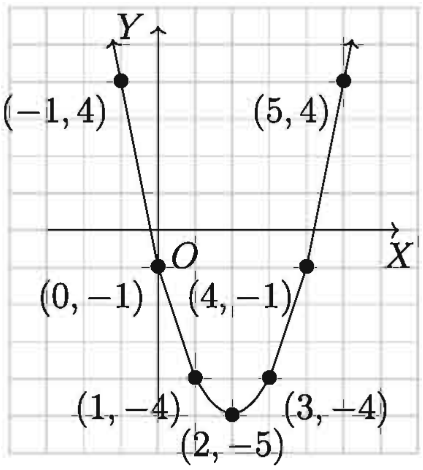
$\therefore$ ফাংশনটির লেখ পাশে দেখানো হলো।



দ্বিঘাত ফাংশন (Quadratic Function)

দ্বিঘাত ফাংশন হলো একটি ফাংশন যা $y = ax^2 + bx + c$ সমীকরণ দ্বারা বর্ণিত যেখানে a, b ও c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$। প্রদত্ত ফাংশনে ধরি $a = 1$, $b = -4$, $c = -1$। তাহলে $y = ax^2 + bx + c$ কে লেখা যায় $y = x^2 - 4x - 1$। বর্ণিত ফাংশন হতে x ও y এর সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায় যা নিচের সারণিতে দেখানো হয়েছে।

x	x^2-4x-1	y
-1	$(-1)^2-4(-1)-1$	4
0	$(0)^2-4(0)-1$	-1
1	$(1)^2-4(1)-1$	-4
2	$(2)^2-4(2)-1$	-5
3	$(3)^2-4(3)-1$	-4
4	$(4)^2-4(4)-1$	-1
5	$(5)^2-4(5)-1$	4



উপরে দ্বিঘাত ফাংশনটির লেখচিত্র। এই দ্বিঘাত ফাংশন এর কিছু সাধারণ বৈশিষ্ট্য লক্ষ করি।

ক) লেখচিত্রটি পরাবৃত্ত আকারের।

খ) লেখচিত্রটির y অক্ষের সমান্তরাল রেখা বা y অক্ষ বরাবর প্রতিসাম্য বিন্দু পাওয়া যাবে।

গ) একটি বিন্দুতে ফাংশনটির মান ক্ষুদ্রতম বা বৃহত্তম হবে।

বৃত্তের লেখচিত্র

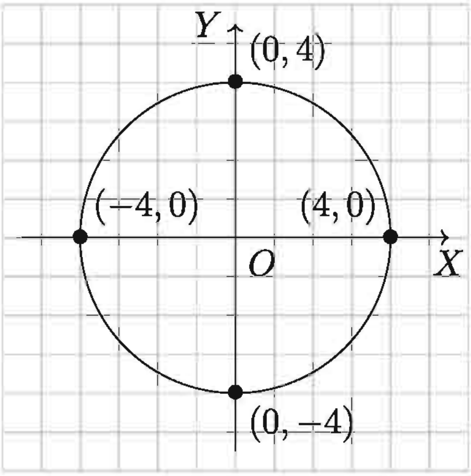
উল্লেখ্য যে p, q ও r ধ্রুবক এবং $r \neq 0$ হলে R এ $S = \{(x, y) : (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2\}$ অন্বয়ের লেখ একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র (p, q) এবং ব্যাসার্ধ r (নবম-দশম শ্রেণির গণিত দ্রষ্টব্য)। ছক কাগজে (p, q) বিন্দু পাতন করে ঐ বিন্দুকে কেন্দ্র করে r ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করে লেখচিত্রটি পাওয়া যায়।

মন্তব্য: যে অন্বয়ের সমাধান সেট অসীম, এর লেখচিত্র অঙ্কনের স্বীকৃত পদ্ধতি হলো যথেষ্ট সংখ্যক সমাধানের প্রতিরূপী বিন্দু ছক কাগজে পাতন করে সাবলীলভাবে ঐ সব বিন্দু যোগ করা, যাতে অন্বয়টির লেখচিত্রের ধরন দ্ব্যর্থহীনভাবে বুঝা যায়। কিন্তু যে অন্বয়ের লেখচিত্র বৃত্ত, এর জন্য কম্পাস ব্যবহার করলে কাজ সহজ ও সুন্দর হয় বিধায় শেষোক্ত পদ্ধতি অবলম্বন করা হলো।

উদাহরণ ৩৫. $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 16\}$

সুতরাং S এর লেখচিত্র একটি বৃত্ত, $x^2 + y^2 = 4^2$ যার কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r = 4$।

S এর লেখচিত্র নিম্নে দেখানো হলো:



কাজ:

ক) নিম্নের প্রত্যেক ক্ষেত্রে প্রদত্ত সমীকরণ থেকে y কে x এর ফাংশন রূপে প্রকাশ কর।

(১) $y-2=3(x-5)$ (২) $y-5=-2(x+1)$

(৩) $y-2=\frac{1}{2}(x+3)$ (৪) $y-5=\frac{4}{3}(x-3)$

খ) লেখচিত্র অঙ্কন কর:

(১) $y=3x-1$ (২) $x+y=3$

(৩) $x^2+y^2=9$ (৪) $y=\frac{1}{3}x+1$

উদাহরণ ৩৬. দেওয়া আছে $f : x \to \dfrac{2x-1}{2x+3}$।

ক) $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=$ কত?

খ) ফাংশনটি এক-এক কিনা তা নির্ধারণ কর।

গ) $2f^{-1}(x)=x$ হলে x এর মান নির্ধারণ কর।

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে, $f : x \to \dfrac{2x-1}{2x+3}$। সুতরাং $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x+3}$।

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\left(-\frac{1}{3}\right)-1}{2\left(-\frac{1}{3}\right)+3}=\frac{-\frac{2}{3}-1}{-\frac{2}{3}+3}=\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{7}{3}}=-\frac{5}{3}\cdot\frac{3}{7}=-\frac{5}{7}$$

খ) দেওয়া আছে, $f : x \to \dfrac{2x-1}{2x+3}$। সুতরাং $f(x)=\dfrac{2x-1}{2x+3}$।

এখানে $2x+3=0$ হলে অর্থাৎ $x=-\frac{3}{2}$ হলে, ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore\ x \neq -\frac{3}{2}$, সুতরাং ডোম $f = R \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$।

ধরি, $x_1 \in$ ডোম f এবং $x_2 \in$ ডোম f

$\therefore f(x_1) = \frac{2x_1-1}{2x_1+3}$ এবং $f(x_2) = \frac{2x_2-1}{2x_2+3}$

এখন $f(x_1) = f(x_2)$ হবে, যদি ও কেবল যদি

$\frac{2x_1-1}{2x_1+3} = \frac{2x_2-1}{2x_2+3}$ বা, $\frac{2x_1-1}{2x_1+3} - 1 = \frac{2x_2-1}{2x_2+3} - 1$

বা, $\frac{2x_1-1-2x_1-3}{2x_1+3} = \frac{2x_2-1-2x_2-3}{2x_2+3}$

বা, $\frac{-4}{2x_1+3} = \frac{-4}{2x_2+3}$ বা, $2x_1+3 = 2x_2+3$

বা, $2x_1 = 2x_2$ বা $x_1 = x_2$ হয়।

$\therefore$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন।

গ) দেওয়া আছে, $f : x \to \frac{2x-1}{2x+3}$, সুতরাং $f(x) = \frac{2x-1}{2x+3}$

ধরি, $f(x) = y \ \therefore x = f^{-1}(y)$

এখন, $f(x) = \frac{2x-1}{2x+3}$ বা, $y = \frac{2x-1}{2x+3}$

বা, $2xy + 3y = 2x - 1$ বা, $2xy - 2x = -3y - 1$

বা, $-2x(1-y) = -(1+3y)$

বা, $x = \frac{1+3y}{2(1-y)}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{1+3y}{2(1-y)}$ $[\because x = f^{-1}(y)]$

বা, $f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{2(1-x)}$ [চলক পরিবর্তন করে]

বা, $2f^{-1}(x) = \frac{1+3x}{1-x}$

বা, $x = \frac{1+3x}{1-x}$ $[\because 2f^{-1}(x) = x]$

বা, $1+3x = x - x^2$ বা, $x^2 + 3x - x + 1 = 0$

বা, $x^2 + 2x + 1 = 0$ বা, $(x+1)^2 = 0$

বা, $x+1=0$ বা, $x=-1$

$\therefore$ নির্ণয় মান $x=-1$

অনুশীলনী ১.২

১. $\{(2,2),(4,2),(2,10),(7,7)\}$ অন্বয়ের ডোমেন কোনটি?

ক) $\{2,4,5,7\}$ খ) $\{2,2,10,7\}$

গ) $\{2,4,10,7\}$ ঘ) $\{2,4,7\}$

২. $S=\{(x,y): x\in A,\ y\in A$ এবং $y=x^2\}$ এবং $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ নিচের কোনটি S অন্বয়ের সদস্য?

ক) $(2,4)$ খ) $(-2,4)$

গ) $(-1,1)$ ঘ) $(1,-1)$

৩. যদি $S=\{(1,4),(2,1),(3,0),(4,1),(5,4)\}$ হয় তবে,

(i) S অন্বয়ের রেঞ্জ $\{4,1,0\}$

(ii) S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়, $S^{-1}=\{(4,1),(1,2),(0,3),(1,4),(4,5)\}$

(iii) S অন্বয়টি একটি ফাংশন

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) ii ও iii গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

৪. যদি $F(x)=\sqrt{x-1}$ হয় তবে $F(10)$ = কত?

ক) 9 খ) 3 গ) -3 ঘ) $\sqrt{10}$

৫. $S=\{(x,y): x^2+y^2-25=0$ এবং $x\geq 0\}$ হলে,

(i) অন্বয়টি ফাংশন নয়।

(ii) অন্বয়টির লেখচিত্র একটি অর্ধবৃত্ত।

(iii) অন্বয়টির লেখচিত্র x অক্ষের উপর অর্ধতলে থাকবে।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii ও iii

৬. $F(x)=\sqrt{x-1}=5$ হলে x এর মান কত?

ক) 5 খ) 24 গ) 25 ঘ) 26

৭. $F(x)=\sqrt{x-1}$ ফাংশনটির ডোমেন নিচের কোনটি?

ক) ডোম $F=\{x\in R: x\neq 1\}$ খ) ডোম $F=\{x\in R: x\geq 1\}$

গ) ডোম $F=\{x\in R: x\leq 1\}$ ঘ) ডোম $F=\{x\in R: x>1\}$

৮. (i) নিচে প্রদত্ত S অন্বয়গুলোর ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত অন্বয় নির্ণয় কর।

(ii) S অথবা S^{-1} অন্বয়গুলো ফাংশন কিনা তা নির্ধারণ কর।

(iii) ফাংশনগুলো এক-এক কিনা নির্ধারণ কর।

ক) $S = \{(1,5),(2,10),(3,15),(4,20)\}$

খ) $S = \{(-3,8),(-2,3),(-1,0),(0,-1),(1,0),(2,3),(3,8)\}$

গ) $S = \left\{\left(\frac{1}{2},0\right),(1,1),(1,-1),\left(\frac{5}{2},2\right),\left(\frac{5}{2},-2\right)\right\}$

ঘ) $S = \{(-3,-3),(-1,-1),(0,0),(1,1),(3,3)\}$

ঙ) $S = \{(2,1),(2,2),(2,3)\}$

৯. $F(x) = \sqrt{x-1}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য

ক) $F(1), F(5)$ এবং $F(10)$ নির্ণয় কর।

খ) $F(a^2+1)$ নির্ণয় কর যেখানে $a \in R$।

গ) $F(x) = 5$ হলে, x নির্ণয় কর।

ঘ) $F(x) = y$ হলে, x নির্ণয় কর যেখানে $y \geq 0$।

১০. $F : R \to R,\ F(x) = x^3$ ফাংশনের জন্য

ক) ডোম F এবং রেঞ্জ F নির্ণয় কর। খ) দেখাও যে, F এক-এক ফাংশন।

গ) F^{-1} নির্ণয় কর। ঘ) দেখাও যে, F^{-1} একটি ফাংশন।

১১. ক) $f : R \to R$ একটি ফাংশন যা $f(x) = ax + b; a, b \in R$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, দেখাও যে, f এক-এক এবং সার্বিক।

খ) $f : [0,1] \to [0,1]$ ফাংশনটি $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, দেখাও যে, f এক-এক এবং সার্বিক।

১২. ক) যদি $f : R \to R$ এবং $g : R \to R$ ফাংশনদ্বয় $f(x) = x^3+5$ এবং $g(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখাও যে, $g = f^{-1}$।

খ) যদি $f : R \to R$ ফাংশনটি $f(x) = 5x - 4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে, $y = f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

১৩. S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কিনা তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর।

ক) $S = \{(x,y) : 2x - y + 5 = 0\}$ খ) $S = \{(x,y) : x + y = 1\}$

গ) $S = \{(x,y) : 3x + y = 4\}$ ঘ) $S = \{(x,y) : x = -2\}$

১৪. S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কিনা তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর।

ক) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$ খ) $S = \{(x, y) : x^2 + y = 9\}$

১৫. দেওয়া আছে, $F(x) = 2x - 1$।

ক) $F(x + 1)$ এবং $F\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) $F(x)$ ফাংশনটি এক-এক কিনা তা যাচাই কর, যখন $x, y \in R$।

গ) $F(x) = y$ হলে x এর তিনটি পূর্ণ সাংখ্যিক মানের জন্য y এর মান নির্ণয় কর এবং $y = 2x - 1$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

১৬. $f : R \to R$ এবং $g : R \to R$ ফাংশন দুইটি যথাক্রমে $f(x) = 3x+3$ এবং $g(x) = \frac{x-3}{3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

ক) $g^{-1}(-3)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) $f(x)$ সার্বিক ফাংশন কিনা তা নির্ধারণ কর।

গ) দেখাও যে, $g = f^{-1}$।

১৭. দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x - 4}$।

ক) $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

খ) $f(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর।

গ) $f^{-1}(x)$ ফাংশন কিনা তা লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

অধ্যায় ২

বীজগাণিতিক রাশি (Algebraic Expression)

বিভিন্ন প্রকারের বীজগাণিতিক রাশির সঙ্গে আমরা পরিচিত। এক বা একাধিক সংখ্যা ও সংখ্যা নির্দেশক প্রতীককে $+$, $-$, $\times$, $\div$, ঘাত বা মূলদ চিহ্নের যেকোনো একটি অথবা একাধিকের সাহায্যে অর্থবহভাবে সংযুক্ত করলে যে নতুন সংখ্যা নির্দেশক প্রতীকের সৃষ্টি হয়, একে বীজগাণিতিক রাশি (algebraic expression) বা সংক্ষেপে রাশি বলা হয়। যেমন, $2x,\ 2x+3ay,\ 6x+4y^2+a+\sqrt{z}$ ইত্যাদি প্রতিটিই এক একটি বীজগাণিতিক রাশি।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা -

- বহুপদীর ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- উদাহরণের সাহায্যে এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- বহুপদীর গুণ ও ভাগ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ভাগশেষ উপপাদ্য ও উৎপাদক উপপাদ্য ব্যাখ্যা এবং তা প্রয়োগ করে বহুপদীর উৎপাদক বিশ্লেষণ করতে পারবে।
- সমমাত্রিক রাশি, প্রতিসম রাশি এবং চক্র-ক্রমিক রাশি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সমমাত্রিক রাশি, প্রতিসম রাশি এবং চক্র-ক্রমিক রাশির উৎপাদক নির্ণয় করতে পারবে।
- মূলদ ভগ্নাংশকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে পারবে।

চলক, ধ্রুবক ও বহুপদী

যদি একটি প্রতীক একাধিক সদস্যবিশিষ্ট কোনো সংখ্যা সেটের যেকোনো অনির্ধারিত সদস্য নির্দেশ করে, তবে প্রতীকটিকে **চলক** বলা হয় এবং সেটটিকে এর **ডোমেন** বলা হয়। যদি প্রতীকটি একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা নির্দেশ করে, তবে একে **ধ্রুবক** বলা হয়। কোনো আলোচনায় একটি চলক এর ডোমেন থেকে যেকোনো মান গ্রহণ করতে পারে। কিন্তু একটি ধ্রুবকের মান কোনো আলোচনায় নির্দিষ্ট থাকে। **বহুপদী** বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে এবং পদগুলো এক বা একাধিক চলকের **শুধু মাত্র অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত** ও **ধ্রুবকের গুণফল** হয়।

এক চলকের বহুপদী

মনে করি, x একটি চলক। তাহলে, (i) a, (ii) $ax+b$, (iii) ax^2+bx+c, (iv) ax^3+bx^2+cx+d ইত্যাদি আকারের রাশিকে x চলকের বহুপদী বলা হয়, যেখানে, a, b, c, d ইত্যাদি ধ্রুবক। সাধারণভাবে, x চলকের বহুপদীর পদসমূহ cx^p আকারের হয়, যেখানে c একটি x-বর্জিত নির্দিষ্ট সংখ্যা (যা শূন্যও হতে পারে) এবং p একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। p শূন্য হলে পদটি শুধু c হয় এবং c শূন্য হলে পদটি বহুপদীতে অনুল্লেখ থাকে। কোনো বহুপদীর সাধারণ পদ cx^p এ c কে x^p এর **সহগ (coefficient)** এবং p কে এই **পদের মাত্রা বা ঘাত (degree) বলা হয়**। কোনো বহুপদীতে উল্লিখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে **বহুপদীটির মাত্রা** বলা হয়। বহুপদীতে গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদটিকে **মুখ্যপদ** ও মুখ্যপদের সহগকে **মুখ্য সহগ** এবং 0 মাত্রাযুক্ত অর্থাৎ, চলক-বর্জিত পদটিকে **ধ্রুবপদ** বলা হয়। যেমন, $2x^6-3x^5-x^4+2x-5$, x চলকের একটি বহুপদী, যার মাত্রা 6, মুখ্যপদ $2x^6$, মুখ্য সহগ 2 এবং ধ্রুবপদ -5। $a \neq 0$ হলে, পূর্বোক্ত (i) বহুপদীর মাত্রা 0, (ii) বহুপদীর মাত্রা 1, (iii) বহুপদীর মাত্রা 2 এবং (iv) বহুপদীর মাত্রা 3। যেকোনো অশূন্য ধ্রুবক $(a \neq 0)$ প্রদত্ত যেকোনো চলকের 0 মাত্রার বহুপদী ($a = ax^0$ বিবেচ্য)। 0 সংখ্যাটিকে শূন্য বহুপদী বিবেচনা করা হয় এবং শূন্য বহুপদীর মাত্রা অসংজ্ঞায়িত ধরা হয়।

x চলকের বহুপদীকে সাধারণত x এর ঘাতের অধঃক্রমে (অর্থাৎ, মুখ্যপদ থেকে শুরু করে ক্রমে ক্রমে ধ্রুব পদ পর্যন্ত) বর্ণনা করা হয়। এরূপ বর্ণনাকে বহুপদীটির **আদর্শ রূপ (standard form)** বলা হয়। ব্যবহারের সুবিধার্থে x চলকের বহুপদীকে $P(x)$, $Q(x)$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন, $P(x) = 2x^2+7x+5$। এরূপ $P(x)$ প্রতীকে x এর উপর বহুপদীটির মানের নির্ভরতা নির্দেশ করে। $P(x)$ বহুপদীতে x চলকের পরিবর্তে কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা a বসালে বহুপদীটির যে মান পাওয়া যায়, একে $P(a)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

উদাহরণ ১. যদি $P(x) = 3x^3+2x^2-7x+8$ হয়, তবে $P(2)$, $P(-2)$ এবং $P\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত বহুপদীতে x এর পরিবর্তে 2, -2, $\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$P(2) = 3(2^3)+2(2^2)-7(2)+8 = 26$$

$$P(-2) = 3(-2)^3+2(-2)^2-7(-2)+8 = 6$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\left(\frac{1}{2}\right)^2-7\left(\frac{1}{2}\right)+8 = \frac{43}{8}$$

দুই চলকের বহুপদী

নিচের বহুপদীগুলো x ও y চলকের অর্থাৎ দুই চলকের বহুপদী।

$$2x+3y-1$$

$$x^2-4xy+y^2-5x+7y+1$$

$$8x^3+y^3+10x^2y+6xy^2-6x+2$$

সাধারণভাবে এরূপ বহুপদীর পদগুলো cx^py^q আকারের হয় যেখানে c একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা (ধ্রুবক) এবং p ও q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। cx^py^q পদে c হচ্ছে x^py^q এর সহগ এবং $p+q$ হচ্ছে এই পদের মাত্রা। এরূপ বহুপদীতে উল্লিখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে **বহুপদীটির মাত্রা** বলা হয়। এরূপ বহুপদীকে $P(x,y)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন, $P(x,y) = 8x^3+y^3-4x^2+7xy+2y-5$ বহুপদীর মাত্রা 3 এবং $P(1,0) = 8-4-5 = -1$।

তিন চলকের বহুপদী

x, y ও z চলকের বহুপদীর পদগুলো $cx^py^qz^r$ আকারের হয়। যেখানে c (ধ্রুবক) পদটির সহগ এবং $p,\ q,\ r$ অঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। এখানে $p+q+r$ কে **এই পদের মাত্রা** এবং বহুপদীতে উল্লিখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাকে **বহুপদীটির মাত্রা** বলা হয়। এরূপ বহুপদীকে $P(x,\ y,\ z)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। যেমন, $P(x,\ y,\ z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ বহুপদীর মাত্রা 3 এবং $P(1,\ 1,\ -2) = 1+1-8+6 = 0$।

কাজ:

ক) নিচের কোনটি বহুপদী নির্ণয় কর:

(১) $2x^3$ (২) $7-3a^2$ (৩) x^3+x^{-2}

(৪) $\dfrac{a^2+a}{a^3-a}$ (৫) $5x^2-2xy+3y^2$ (৬) $6a+3b$

(৭) $c^2+\dfrac{2}{c}-3$ (৮) $3\sqrt{n-4}$ (৯) $2x(x^2+3y)$

(১০) $3x-(2y+4z)$ (১১) $\dfrac{6}{x}+2y$ (১২) $\dfrac{3}{4}x-2y$

খ) নিচের বহুপদীগুলোতে চলকের সংখ্যা ও মাত্রা নির্ণয় কর:

(১) $x^2+10x+5$ (২) $3a+2b$ (৩) $4xyz$

(৪) $2m^2n-mn^2$ (৫) $7a+b-2$ (৬) $6a^2b^2c^2$

গ) নিচের বহুপদীগুলোর প্রত্যেকটিকে

(i) x চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং x চলকের বহুপদী রূপে এর মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর।

(ii) y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং y চলকের বহুপদীরূপে এর মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর।

(১) $3x^2-y^2+x-3$ (২) $x^2-x^6+x^4+3$

(৩) $5x^2y-4x^4y^4-2$ (৪) $x+2x^2+3x^3+6$

(৫) $3x^3y+2xyz-x^4$

ঘ) যদি $P(x) = 2x^2+3$ হয়, তবে $P(5),\ P(6),\ P\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

বহুপদীর গুণফল ও ভাগফল

দুইটি বহুপদীর যোগফল, বিয়োগফল এবং গুণফল সমসময় বহুপদী হয়। দুইটি বহুপদীর ভাগফল বহুপদী হতেও পারে নাও হতে পারে। যেমন x^3 দ্বারা x কে ভাগ করলে ভাগফল যদি x^{-2} ধরা হয় তখন এটি বহুপদী নয়। কিন্তু x কে ভাগশেষ ধরে নিলে সেক্ষেত্রে ভাগফল 0 একটি বহুপদী।

উদাহরণ ২. (x^2+2) কে $(x+1)$ দ্বারা গুণ করলে গুণফল কত?

এখানে (x^2+2) এবং $(x+1)$ বহুপদী দুইটির গুণফল $(x^2+2)(x+1) = x^3+x^2+2x+2$ একটি বহুপদী যার মাত্রা $2+1=3$ এবং মুখ্য সহগ $1\times 1 = 1$।

উদাহরণ ৩. $(x^2+1)(x-6)$কে $2x^2+3$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল কত?

এখানে ভাজ্য $P(x) = (x^2+1)(x-6) = x^3-6x^2+x-6$ এর মাত্রা 3 এবং মুখ্য সহগ 1।

আর ভাজক $Q(x) = 2x^2+3$ এর মাত্রা 2 এবং মুখ্য সহগ 2।

$P(x)$ কে $Q(x)$ দিয়ে ভাগ করলে, ভাগফল $F(x) = \frac{1}{2}x-3$ এবং ভাগশেষ $R(x) = -\frac{x}{2}+3$।

কাজেই, ভাগফল $F(x)$ একটি বহুপদী যার মাত্রা $3-2=1$ এবং মুখ্য সহগ $\frac{1}{2}$।

দ্রষ্টব্য: দুইটি বহুপদীর গুণফল ও ভাগফলের মাত্রা ও মুখ্য সহগের ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত সূত্রগুলো সত্য।

ক) x চলকের বহুপদী $P(x)$ এবং $Q(x)$ এর গুণফল $F(x) = P(x)Q(x)$ একটি বহুপদী
যার মাত্রা $=$ $P(x)$ এর মাত্রা $+$ $Q(x)$ এর মাত্রা এবং
মুখ্য সহগ $=$ $P(x)$ এর মুখ্য সহগ $\times$ $Q(x)$ এর মুখ্য সহগ

খ) x চলকের বহুপদী $P(x)$ কে $Q(x)$ দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল যদি বহুপদী $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ হয় তাহলে
$R(x)$ এর মাত্রা $=$ $P(x)$ এর মাত্রা $-$ $Q(x)$ এর মাত্রা এবং

$$\text{মুখ্য সহগ} = \frac{P(x) \text{ এর মুখ্য সহগ}}{Q(x) \text{ এর মুখ্য সহগ}}$$

ভাগ সূত্র

যদি $P(x)$ ও $Q(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী হয় এবং $Q(x)$ এর মাত্রা $\leq$ $P(x)$ এর মাত্রা হয়, তবে $Q(x)$ দ্বারা $P(x)$ কে ভাগ করে ভাগফল $F(x)$ ও ভাগশেষ $R(x)$ পাওয়া যায়, যেখানে

ক) $F(x)$ ও $R(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী,

খ) $F(x)$ এর মাত্রা $=$ $P(x)$ এর মাত্রা $-$ $Q(x)$ এর মাত্রা,

গ) $R(x)=0$ অথবা $R(x)$ এর মাত্রা $<$ $Q(x)$ এর মাত্রা,

ঘ) সকল x এর জন্য $P(x) = F(x)Q(x)+R(x)$।

সমতা সূত্র

ক) যদি সকল x এর জন্য $ax+b=px+q$ হয়, তবে $x=0$ ও $x=1$ বসিয়ে পাই, $b=q$ এবং $a+b=p+q$ যা থেকে দেখা যায় যে, $a=p,\ b=q$

খ) যদি সকল x এর জন্য $ax^2+bx+c=px^2+qx+r$ হয়, তবে $x=0,\ x=1$ ও $x=-1$ বসিয়ে পাই, $c=r,\ a+b+c=p+q+r$ এবং $a-b+c=p-q+r$ যা থেকে দেখা যায় যে, $a=p,\ b=q,\ c=r$।

গ) সাধারণভাবে দেখা যায় যে, যদি সকল x এর জন্য $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$ হয়, তবে, $a_0=p_0,\ a_1=p_1,\cdots,\ a_{n-1}=p_{n-1},\ a_n=p_n$

অর্থাৎ, সমতা চিহ্নের উভয় পক্ষে x এর একই ঘাতযুক্ত সহগদ্বয় পরস্পর সমান।

মন্তব্য: x চলকের n মাত্রার বহুপদীর বর্ণনায় সহগগুলোকে a_0 (a সাব-জিরো), a_1 (a সাব-ওয়ান) ইত্যাদি নেওয়া সুবিধাজনক।

অভেদ (Identity)

দুইটি বহুপদী $P(x)$ ও $Q(x)$ সকল x এর জন্য সমান হলে, এদের সমতাকে অভেদ বলা হয় এবং তা বুঝাতে অনেক সময় $P(x)\equiv Q(x)$ লেখা হয়। এক্ষেত্রে $P(x)$ ও $Q(x)$ বহুপদী দুইটি অভিন্ন হয়। $\equiv$ চিহ্নকে অভেদ চিহ্ন বলা হয়। সাধারণভাবে একই চলকসমূহের দুইটি বীজগণিতীয় রাশির সমতাকে **অভেদ (identity)** বলা হয়, যদি রাশি দুইটিতে প্রতিটি চলকের ডোমেন একই হয় এবং চলকসমূহের ডোমেনভুক্ত মানের জন্য রাশি দুইটির মান সমান হয়। যেমন, $x(x+2)=x^2+2x$, $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ উভয়ই অভেদ।

ভাগশেষ ও উৎপাদক উপপাদ্য

এই অনুচ্ছেদে শুধু x চলকের বহুপদী বিবেচনা করা হবে। প্রথমে দুইটি উদাহরণ বিবেচনা করি।

উদাহরণ ৪. যদি $P(x)=x^2-5x+6$ হয়, তবে $P(x)$ কে $(x-4)$ দ্বারা ভাগ কর এবং দেখাও যে, ভাগশেষ $P(4)$ এর সমান।

সমাধান: $P(x)$ কে $(x-4)$ দ্বারা নিচের মতো ভাগ করি।

$$\begin{array}{l} x-4)x^2-5x+6(x-1 \\ \qquad\ \underline{x^2-4x} \\ \qquad\qquad -x+6 \\ \qquad\qquad \underline{-x+4} \\ \qquad\qquad\quad 2 \end{array}$$

এখানে ভাগশেষ 2।

যেহেতু $P(4)=4^2-5(4)+6=2$, সুতরাং, ভাগশেষ $P(4)$ এর সমান।

উদাহরণ ৫. যদি $P(x) = ax^3 + bx + c$ হয়, তবে $P(x)$ কে $x - m$ দ্বারা ভাগ করে দেখাও যে, ভাগশেষ $P(m)$ এর সমান।

সমাধান: $P(x)$ কে $x - m$ দ্বারা নিচের মতো ভাগ করি।

$$\begin{array}{l}
x-m)\,ax^3+bx+c\,(ax^2+amx+am^2+b \\
\qquad\quad \underline{ax^3-amx^2\qquad\quad} \\
\qquad\qquad\quad amx^2+bx+c \\
\qquad\qquad\quad \underline{amx^2-am^2x\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad\quad (am^2+b)x+c \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{(am^2+b)x-(am^2+b)m} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad am^3+bm+c
\end{array}$$

এখানে ভাগশেষ = $am^3 + bm + c$।

আবার, $P(m) = am^3 + bm + c$, সুতরাং ভাগশেষ $P(m)$ এর সমান।

উপরের এই উদাহরণ দুইটি থেকে নিম্নের প্রতিজ্ঞাটি সম্পর্কে ধারণা পাওয়া যায়।

প্রতিজ্ঞা ১ (ভাগশেষ উপপাদ্য). যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং a কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা হয়, তবে $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P(a)$ হবে।

প্রমাণ: $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় 0 অথবা অশূন্য ধ্রুবক হবে।

মনে করি, ভাগশেষ R এবং ভাগফল $Q(x)$; তাহলে, ভাগের নিয়মে, সকল x এর জন্য

$$P(x) = (x - a)Q(x) + R$$

যাতে $x = a$ বসিয়ে পাই, $P(a) = 0 \cdot Q(a) + R = R$।

সুতরাং, $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P(a)$ হবে।

উদাহরণ ৬. $P(x) = x^3 - 8x^2 + 6x + 60$ কে $x + 2$ দ্বারা ভাগ করলে, ভাগশেষ কত হবে?

সমাধান: যেহেতু $x + 2 = x - (-2) = (x - a)$ যেখানে $a = -2$,

সুতরাং, ভাগশেষ $= P(-2) = (-2)^3 - 8(-2)^2 + 6(-2) + 60 = 8$।

প্রতিজ্ঞা ১ এর অনুকরণে নিচের প্রতিজ্ঞাটিও প্রমাণ করা যায়।

প্রতিজ্ঞা ২. যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং $a \neq 0$ হয়, তবে $P(x)$ কে $ax + b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P\left(-\frac{b}{a}\right)$ হবে।

উদাহরণ ৭. বহুপদী $P(x) = 36x^2 - 8x + 5$ কে $(2x - 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

সমাধান: নির্ণেয় ভাগশেষ $P\left(\frac{1}{2}\right) = 36\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{2}\right) + 5 = 9 - 4 + 5 = 10$।

উদাহরণ ৮. যদি $P(x) = 5x^3 + 6x^2 - ax + 6$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 6 হয়, তবে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $P(x)$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,

$$P(2) = 5(2)^3 + 6(2)^2 - a(2) + 6 = 40 + 24 - 2a + 6 = 70 - 2a।$$

শর্তানুসারে, $70 - 2a = 6$ বা, $2a = 70 - 6 = 64$ অর্থাৎ $a = 32$।

উদাহরণ ৯. যদি $P(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$ হয় এবং $P(x)$ কে $x - a$ এবং $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$।

সমাধান: $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$,

এবং $P(x)$ কে $x - b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(b) = b^3 + 5b^2 + 6b + 8$।

শর্তানুসারে, $a^3 + 5a^2 + 6a + 8 = b^3 + 5b^2 + 6b + 8$

বা, $a^3 - b^3 + 5(a^2 - b^2) + 6(a - b) = 0$

বা, $(a - b)(a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6) = 0$

$\therefore\ a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$, যেহেতু $a \neq b$

প্রতিজ্ঞা ৩ (উৎপাদক উপপাদ্য). যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং $P(a) = 0$ হয়, তবে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $x - a$ হবে।

প্রমাণ: $P(x)$ বহুপদীকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী ভাগশেষ $= P(a)$, যা প্রদত্ত শর্ত অনুযায়ী 0। অর্থাৎ $P(x)$ বহুপদী $x - a$ দ্বারা বিভাজ্য।

$\therefore x - a$ হচ্ছে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য

প্রতিজ্ঞা ৪. $x - a$ যদি $P(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক হয়, তবে $P(a) = 0$ হবে।

প্রমাণ: যেহেতু $x - a$, $P(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক, সুতরাং আরেকটি বহুপদী $Q(x)$ পাওয়া যায় যেন $P(x) = (x - a)Q(x)$।

এখানে $x = a$ বসিয়ে দেখা যায় যে, $P(a) = (a - a)Q(a) = 0 \cdot Q(a) = 0$।

উদাহরণ ১০. দেখাও যে, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ বহুপদীর $x - 1$ একটি উৎপাদক হবে যদি ও কেবল যদি $a + b + c + d = 0$ হয়।

সমাধান: মনে করি, $a + b + c + d = 0$।

তাহলে, $P(1) = a + b + c + d = 0$ [শর্তানুসারে]।

সুতরাং, $x - 1,\ P(x)$ এর একটি উৎপাদক [উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে]।

এবার মনে করি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $x-1$।

তবে, উৎপাদকের বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$P(1)=0$ অর্থাৎ $a+b+c+d=0$।

মন্তব্য: $x-1$ ধনাত্মক মাত্রার যেকোনো বহুপদীর একটি উৎপাদক হবে যদি ও কেবল যদি বহুপদীটির সহগসমূহের সমষ্টি 0 হয়।

উদাহরণ ১১. মনে করি, $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ বহুপদীর সহগগুলো পূর্ণসংখ্যা, $a\neq 0,\ d\neq 0$ এবং $x-r$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক। দেখাও যে,

ক) যদি r পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে $r,\ d$ এর উৎপাদক হবে।

খ) যদি $r=\dfrac{p}{q}$ লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশিত মূলদ সংখ্যা হয়, তবে $p,\ d$ এর উৎপাদক ও $q,\ a$ এর উৎপাদক হবে।

সমাধান:

ক) উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য থেকে দেখা যায় যে,

$P(r)=ar^3+br^2+cr+d=0$ বা, $(ar^2+br+c)r=-d$

যেহেতু $(ar^2+br+c),\ r$ ও d প্রত্যেকেই পূর্ণসংখ্যা, সুতরাং, $r,\ d$ এর একটি উৎপাদক।

খ) উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য থেকে দেখা যায় যে,

$P(r)=ar^3+br^2+cr+d=0$

বা, $P\left(\dfrac{p}{q}\right)=a\left(\dfrac{p}{q}\right)^3+b\left(\dfrac{p}{q}\right)^2+c\left(\dfrac{p}{q}\right)+d=0$

বা, $ap^3+bp^2q+cpq^2+dq^3=0\cdots\cdots(1)$

(1) থেকে পাওয়া যায় $(ap^2+bpq+cq^2)p=-dq^3\cdots\cdots(2)$

এবং $(bp^2+cpq+dq^2)q=-ap^3\cdots\cdots(3)$

এখন, $ap^2+bpq+cq^2,\ bp^2+cpq+dq^2,\ p,\ q,\ d,\ a$ প্রত্যেকেই পূর্ণসংখ্যা।

সুতরাং (2) থেকে পাওয়া যায়, $p,\ dq^3$ এর একটি উৎপাদক এবং (3) থেকে পাওয়া যায়, $q,\ ap^3$ এর একটি উৎপাদক। কিন্তু p ও q এর ± 1 ছাড়া কোনো সাধারণ উৎপাদক নেই। সুতরাং $p,\ d$ এর একটি উৎপাদক এবং $q,\ a$ এর একটি উৎপাদক।

দ্রষ্টব্য: উপরের উদাহরণ থেকে আমরা লক্ষ করি যে, উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে পূর্ণসাংখ্যিক সহগবিশিষ্ট বহুপদী $P(x)$ এর উৎপাদক নির্ণয়ের জন্য প্রথমে $P(r)$ এবং পরে $P\left(\dfrac{r}{s}\right)$ পরীক্ষা করা যেতে পারে, যেখানে, r বহুপদীটির ধ্রুব পদের উৎপাদক ($r=\pm 1$ সহ) এবং s বহুপদীটির মুখ্য সহগের উৎপাদক ($s=\pm 1$ সহ)।

উদাহরণ ১২. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: প্রদত্ত বহুপদীর সহগসমূহ পূর্ণসংখ্যা এবং ধ্রুব পদ = -6, মুখ্য সহগ = 1।

এখন r যদি পূর্ণসংখ্যা হয় এবং $P(x)$ এর যদি $x - r$ আকারের কোন উৎপাদক থাকে, তবে r অবশ্যই -6 এর উৎপাদক অর্থাৎ, $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$ এর কোনো একটি হবে। এখন r এর এরূপ বিভিন্ন মানের জন্য $P(x)$ পরীক্ষা করি।

$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0,\ \therefore x - 1,\ P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$P(-1) = -1 - 6 - 11 - 6 \neq 0,\ \therefore x + 1,\ P(x)$ এর উৎপাদক নয়।

$P(2) = 8 - 24 + 22 - 6 = 0,\ \therefore x - 2,\ P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$P(-2) = -8 - 24 - 22 - 6 \neq 0,\ \therefore x + 2,\ P(x)$ এর উৎপাদক নয়।

$P(3) = 27 - 54 + 33 - 6 = 0,\ \therefore x - 3,\ P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

যেহেতু, $P(x)$ এর মাত্রা 3 এবং তিনটি 1 মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে, সুতরাং $P(x)$ এর অন্য কোনো উৎপাদক যদি থাকে তবে তা ধ্রুবক হবে।

$\therefore P(x) = k(x-1)(x-2)(x-3)$ যেখানে k ধ্রুবক।

উভয়পক্ষে x এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ বিবেচনা করে দেখা যায় যে, $k = 1$।

সুতরাং, $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$।

দ্রষ্টব্য: কোনো বহুপদী $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার জন্য প্রথমে $(x - r)$ আকারের একটি উৎপাদক নির্ণয় করে $P(x)$ কে সরাসরি $(x - r)$ দ্বারা ভাগ করে অথবা $P(x)$ এর পদসমূহকে পুনর্বিন্যাস করে $P(x)$ কে $P(x) = (x - r)Q(x)$ আকারে লেখা যায়। সেখানে $Q(x)$ বহুপদীর মাত্রা $P(x)$ এর মাত্রা থেকে 1 কম। অতঃপর $Q(x)$ এর উৎপাদক নির্ণয় করে অগ্রসর হতে হয়।

উদাহরণ ১৩. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর: $18x^3 + 15x^2 - x - 2$।

সমাধান: মনে করি, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$।

$P(x)$ এর ধ্রুব পদ -2 এর উৎপাদকসমূহের সেট $F_1 = \{1,\ -1,\ 2,\ -2\}$।

$P(x)$ এর মুখ্য সহগ 18 এর উৎপাদকসমূহের সেট

$F_2 = \{1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 6,\ -6,\ 9,\ -9,\ 18,\ -18\}$।

এখন $P(a)$ বিবেচনা করি, যেখানে, $a = \dfrac{r}{s}$ এবং $r \in F_1,\ s \in F_2$।

$a = 1$ হলে, $P(1) = 18 + 15 - 1 - 2 \neq 0$।

$a = -1$ হলে, $P(-1) = -18 + 15 + 1 - 2 \neq 0$।

$a=-\frac{1}{2}$ হলে, $P\left(-\frac{1}{2}\right)=18\left(-\frac{1}{8}\right)+15\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}-2 \ \ =0$।

সুতরাং $x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(2x+1)$ অর্থাৎ $(2x+1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $18x^3+15x^2-x-2=18x^3+9x^2+6x^2+3x-4x-2$

$$=9x^2(2x+1)+3x(2x+1)-2(2x+1)=(2x+1)(9x^2+3x-2)$$।

এবং $9x^2+3x-2=9x^2+6x-3x-2=3x(3x+2)-1(3x+2)=(3x+2)(3x-1)$।

$\therefore P(x)=(2x+1)(3x+2)(3x-1)$।

উদাহরণ ১৪. $-3x^2-2xy+8y^2+11x-8y-6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: কেবল x সম্বলিত পদগুলো ও ধ্রুবক নিয়ে পাওয়া যায় $-3x^2+11x-6$।

$$-3x^2+11x-6\equiv(-3x+2)(x-3) \text{ অথবা } (3x-2)(-x+3)\cdots\cdots(1)$$

আবার কেবল y সম্বলিত পদগুলো ও ধ্রুবক নিয়ে পাওয়া যায় $8y^2-8y-6$।

$$8y^2-8y-6\equiv(4y+2)(2y-3) \text{ অথবা } (-4y-2)(-2y+3)\cdots\cdots(2)$$

উপরের (1) ও (2) এর উৎপাদকগুলোকে সমন্বয় করে প্রদত্ত রাশির উৎপাদক পাওয়া যাবে, তবে ধ্রুবকগুলো $+2,-3$ অথবা $-2,+3$ উভয় সমীকরণে অবশ্যই একই হতে হবে ঠিক যেমনটি x এবং y এর সহগ।

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $(-3x+4y+2)(x+2y-3)$ অথবা $(3x-4y-2)(-x-2y+3)$।

নির্ণীত উৎপাদক যে সঠিক সেটা যাচাই করার জন্য আমরা xy এর সহগ $-3\ \cdot 2+4\cdot 1=-2$ অথবা $3\cdot(-2)-4\cdot(-1)=-2$ মিলিয়ে দেখতে পারি।

কাজ:

ক) যদি $P(x)=2x^4-6x^3+5x-2$ হয়, তবে $P(x)$ কে নিম্নলিখিত বহুপদী দ্বারা ভাগ করে ভাগশেষ নির্ণয় কর।

(১) $x-1$ (২) $x-2$ (৩) $x+2$

(৪) $x+3$ (৫) $2x-1$ (৬) $2x+1$

খ) ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে ভাগশেষ নির্ণয় কর।

(১) ভাজ্য: $4x^3-7x+10$, ভাজক: $x-2$

(২) ভাজ্য: $5x^3-11x^2-3x+4$, ভাজক: $x+1$

(৩) ভাজ্য: $2y^3-y^2-y-4$, ভাজক: $y+3$

(৪) ভাজ্য: $2x^3+x^2-18x+10$, ভাজক: $2x+1$

গ) দেখাও যে, $3x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ এর একটি উৎপাদক $(x-1)$।

ঘ) $2x^3 + x^2 + ax - 9$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x+3$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

ঙ) দেখাও যে, $x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x-3$।

চ) যদি $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$ হয়, তবে $P(x)$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে একে ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর।

ছ) দেখাও যে, $4x^4 - 5x^3 + 5x - 4$ বহুপদীর $x+1$ এবং $x-1$ রাশিদ্বয় উৎপাদক।

জ) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

(১) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ (২) $x^3 + 4x^2 + x - 6$

(৩) $a^3 - a^2 - 10a - 8$ (৪) $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 8x + 5$

(৫) $-2x^2 + 6y^2 + xy + 8x - 2y - 8$

সমমাত্রিক বহুপদী, প্রতিসম ও চক্র-ক্রমিক রাশি

সমমাত্রিক বহুপদী: কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে, একে **সমমাত্রিক বহুপদী (homogeneous polynomial)** বলা হয়। $x^2 + 2xy + 5y^2$ রাশিটি x, y চলকের দুই মাত্রার একটি সমমাত্রিক বহুপদী (এখানে প্রত্যেক পদের মাত্রা 2)।

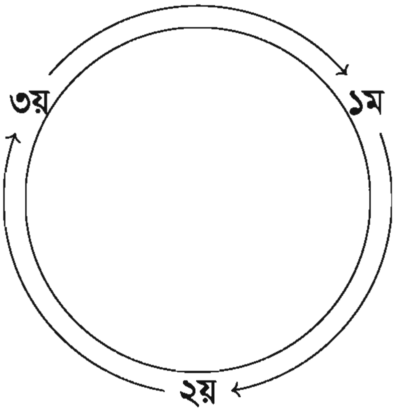
$ax^2 + 2hxy + by^2$ রাশিটি x, y চলকের একটি দুই মাত্রার সমমাত্রিক রাশি, যেখানে, a, h, b নির্দিষ্ট সংখ্যা। x, y, a, h, b প্রত্যেককে চলক বিবেচনা করা হলে এটি এই চলকসমূহের তিন মাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী হয়। $2x^2y + y^2z + 9z^2x - 5xyz$ বহুপদীটি x, y, z চলকের তিন মাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী। (এখানে প্রত্যেক পদের মাত্রা 3)।

প্রতিসম রাশি (Symmetric Expression): একাধিক চলক সংবলিত কোনো বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুইটি চলক স্থান বিনিময়ে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে, তবে রাশিটিকে ঐ চলকসমূহের **প্রতিসম (symmetric) রাশি** বলা হয়।

$a+b+c$ রাশিটি a, b, c চলকের প্রতিসম রাশি। কারণ, a, b, c চলক তিনটির যেকোনো দুইটির স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে। একইভাবে, $ab + bc + ca$ রাশিটি a, b, c চলকের এবং $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ রাশিটি x, y, z চলকের প্রতিসম রাশি।

কিন্তু $2x^2 + 5xy + 6y^2$ রাশিটি x ও y চলকের প্রতিসম নয়, কারণ রাশিটিতে x ও y এর পরস্পর স্থান বিনিময়ে $2y^2 + 5xy + 6x^2$ রাশিতে পরিবর্তিত হয় যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।

চক্র-ক্রমিক রাশি (Cyclic Expression): তিনটি চলক সংবলিত কোনো রাশিতে প্রথম চলক দ্বিতীয় চলকের, দ্বিতীয় চলক তৃতীয় চলকের এবং তৃতীয় চলক প্রথম চলকের স্থলে বসালে রাশিটি যদি পরিবর্তিত না হয়, তবে রাশিটিকে ঐ তিন চলকের উল্লিখিত ক্রমে একটি **চক্র-ক্রমিক রাশি** বা **চক্র প্রতিসম রাশি (cyclically symmetric expression)** বলা হয়। চলকগুলোর স্থান পরিবর্তন নিচের চিত্রের মত চক্রাকারে করা হয় বলেই এরূপ রাশিকে চক্র-ক্রমিক রাশি বলা হয়ে থাকে।



$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx$ রাশিটি $x,\ y,\ z$ চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি, কারণ এতে চক্রাকারে x এর পরিবর্তে y, y এর পরিবর্তে z এবং z এর পরিবর্তে x বসালে রাশিটি একই থাকে। একইভাবে $x^2y+y^2z+z^2x$ রাশিটি $x,\ y,\ z$ চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

$x^2-y^2+z^2$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি নয়, কারণ এতে x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x বসালে রাশিটি $y^2-z^2+x^2$ রাশিতে পরিবর্তিত হয় যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।

তিনটি চলকের প্রত্যেক প্রতিসম রাশি চক্র-ক্রমিক। কিন্তু প্রত্যেক চক্র-ক্রমিক রাশি প্রতিসম নয়। যেমন, $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক, কিন্তু প্রতিসম নয়। কারণ, রাশিটিতে x এবং y স্থান বিনিময় করলে $y^2(x-z)+x^2(z-y)+z^2(y-x)$ রাশি পাওয়া যায় যা পূর্বের রাশিটি থেকে ভিন্ন।

দ্রষ্টব্য: বর্ণনার সুবিধার্থে $x,\ y$ চলকের রাশিকে $F(x,y)$ আকারের এবং $x,\ y,\ z$ চলকের রাশিকে $F(x,y,z)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

কাজ: দেখাও যে, $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ রাশিটি প্রতিসম নয় কিন্তু চক্রক্রমিক।

চক্র-ক্রমিক বহুপদীর উৎপাদকে বিশ্লেষণ

এরূপ রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার কোনো ধরা-বাঁধা নিয়ম নেই। সাধারণত, রাশিটির পদগুলোকে পুনর্বিন্যাস করে উৎপাদক বের করা হয়। অনেক সময় রাশিটিকে কোন একটি চলকের বহুপদী ধরে উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে এক বা একাধিক উৎপাদক নির্ণয় করা হয় এবং রাশিটির চক্র-ক্রমিক ও সমমাত্রিক বৈশিষ্ট্য বিবেচনা করে অপরাপর উৎপাদক নির্ণয় করা হয়।

এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে, $a,\ b,\ c$ চলকের

ক) কোনো চক্র-ক্রমিক বহুপদীর $(a-b)$ একটি উৎপাদক হলে, $(b-c)$ এবং $(c-a)$ ও একই চক্র-ক্রমিক বহুপদীর উৎপাদক হবে।

খ) এক মাত্রার ও দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী যথাক্রমে $k(a+b+c)$ ও $k(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)$ যেখানে k ও m ধ্রুবক।

গ) দুইটি বহুপদী যদি এমন হয় যে, চলকগুলোর সকল মানের জন্য এদের মান সমান হয়, তবে বহুপদী দুইটির অনুরূপ পদ দুইটির সহগ পরস্পর সমান হবে।

উদাহরণ ১৫. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: এখানে দুইটি পদ্ধতি দেখানো হয়েছে।

প্রথম পদ্ধতি: $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

$$\begin{aligned}
&= bc(b-c)+c^2a-ca^2+a^2b-ab^2\\
&= bc(b-c)+a^2b-ca^2-ab^2+c^2a\\
&= bc(b-c)+a^2(b-c)-a(b^2-c^2)\\
&= bc(b-c)+a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)\\
&= (b-c)\{bc+a^2-a(b+c)\}\\
&= (b-c)\{bc+a^2-ab-ac\}\\
&= (b-c)\{bc-ab-ac+a^2\}\\
&= (b-c)\{b(c-a)-a(c-a)\}\\
&= (b-c)(c-a)(b-a)\\
&= -(a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি: প্রদত্ত রাশিটিকে a এর বহুপদী $P(a)$ ধরে তাতে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে দেখি যে,

$$P(b)=bc(b-c)+cb(c-b)+b^2(b-b)=0।$$

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। এখন যেহেতু প্রদত্ত রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি, সেহেতু $(b-c)$ এবং $(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক।

প্রদত্ত রাশিটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক এবং এর তিনটি এক মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং অন্য উৎপাদক যদি থাকে তা ধ্রুবক হবে।

অর্থাৎ, $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=k(a-b)(b-c)(c-a)\cdots\cdots(1)$

যেখানে k একটি ধ্রুবক। $a,\ b,\ c$ এর সকল মানের জন্য (1) সত্য।

(1) নং এ $a=0,\ b=1,\ c=2$ বসিয়ে পাই,

$$1\cdot 2(-1)=k(-1)(-1)(2) \qquad \therefore k=-1$$

$\therefore bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

উদাহরণ ১৬. $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: প্রদত্ত রাশিটিকে a এর বহুপদী $P(a)$ বিবেচনা করে তাতে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে পাই, $P(b)=b^3(b-c)+b^3(c-b)+c^3(b-b)=0$। সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। এখন যেহেতু প্রদত্ত রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি সেহেতু $(b-c)$ এবং $(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। আবার প্রদত্ত রাশিটি চার মাত্রার সমমাত্রিক রাশি এবং

$(a-b)(b-c)(c-a)$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক রাশি। সুতরাং প্রদত্ত রাশির অপর উৎপাদকটি অবশ্যই চক্র-ক্রমিক এবং এক মাত্রার সমমাত্রিক রাশি $k(a+b+c)$ হবে, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

$$\therefore a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \cdots\cdots (1)$$

$a,\ b,\ c$ এর সকল মানের জন্য (1) সত্য।

সুতরাং (1) নং এ $a=0,\ b=1,\ c=2$ বসিয়ে পাই,

$$2+8(-1) = k(-1)(-1)(2)(3) \qquad \text{বা } k=-1।$$

(1) এ $k=-1$ বসিয়ে পাই,

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)।$$

উদাহরণ ১৭. $(b+c)(c+a)(a+b)+abc$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: রাশিটিকে a এর বহুপদী $P(a)$ ধরে তাতে a এর পরিবর্তে $-b-c$ বসিয়ে পাই,

$$P(-b-c) = (b+c)(c-b-c)(-b-c+b)+(-b-c)bc = bc(b+c)-bc(b+c) = 0।$$

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a+b+c)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। প্রদত্ত রাশিটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী এবং এর এক মাত্রার একটি উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং অপর উৎপাদক দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী হবে, অর্থাৎ $k(a^2+b^2+c^2)+m(bc+ca+ab)$ আকারের হবে, যেখানে k ও m ধ্রুবক।

$$\therefore (b+c)(c+a)(a+b)+abc = (a+b+c)\{k(a^2+b^2+c^2)+m(bc+ca+ab)\} \cdots\ (1)$$

a, b, c এর সকল মানের জন্য (1) সত্য।

(1) এ প্রথমে $a=0, b=0, c=1$ এবং পরে $a=1, b=1, c=0$ বসিয়ে যথাক্রমে পাই,

$$0=k \text{ এবং } 2=2(k\times 2+m) \qquad \therefore k=0,\ m=1।$$

এখন k ও m এর মান বসিয়ে পাই, $(b+c)(c+a)(a+b)+abc = (a+b+c)(bc+ca+ab)$।

মন্তব্য: উদাহরণ ১৫ এর সমাধানের প্রথম পদ্ধতির অনুরূপ পদ্ধতিতে উদাহরণ ১৬ এবং উদাহরণ ১৭ এ বর্ণিত রাশি দুইটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যাবে।

একটি বিশেষ বীজগাণিতিক সূত্র: $a,\ b,\ c$ এর সকল মানের জন্য

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

প্রমাণ: এখানে দুইটি পদ্ধতিতে প্রমাণ দেখানো হয়েছে।

প্রথম পদ্ধতি (সরাসরি বীজগাণিতিক প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে)

$$\begin{aligned}
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
&=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc\\
&=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)\\
&=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)
\end{aligned}$$

$$= (a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)-3ab(a+b+c)$$
$$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি (সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদীর ধারণা ব্যবহার করে)

$a^3+b^3+c^3-3abc$ রাশিটিকে a চলকের বহুপদী $P(a)$ ধরে $a=-(b+c)$ বসিয়ে পাই,

$$P\{-(b+c)\} = -(b+c)^3+b^3+c^3+3(b+c)bc = (b+c)^3-(b+c)^3 = 0$$

সুতরাং $a+b+c$ বিবেচনাধীন রাশিটির একটি উৎপাদক। যেহেতু $a^3+b^3+c^3-3abc$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী, সুতরাং রাশিটির অপর উৎপাদক $k(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)$ আকারের হবে, যেখানে k ও m ধ্রুবক। অতএব, সকল $a,\ b$ ও c এর জন্য

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\{k(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)\}$$

এখানে প্রথমে $a=1,\ b=0,\ c=0$ ও পরে $a=1,\ b=1,\ c=0$ বসিয়ে পাই, $k=1$ এবং $2=2(k\times 2+m)$ অর্থাৎ $k=1$ এবং $1=2+m \implies m=-1$।

$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$।

অনুসিদ্ধান্ত ৫. $a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

প্রমাণ: $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$$= \tfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$$
$$= \tfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

অনুসিদ্ধান্ত ৬. যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে $a^3+b^3+c^3=3abc$।

অনুসিদ্ধান্ত ৭. যদি $a^3+b^3+c^3=3abc$ হয়, তবে $a+b+c=0$ অথবা $a=b=c$।

উদাহরণ ১৮. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান: ধরি $A=a-b,\ B=b-c,\ C=c-a$।

তাহলে, $A+B+C=a-b+b-c+c-a=0$।

সুতরাং, $A^3+B^3+C^3=3ABC$।

অর্থাৎ, $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$।

কাজ: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

ক) (১) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

(২) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

(৩) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

(৪) $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)$

(৫) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$

(৬) $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$

(৭) $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

(৮) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

খ) যদি $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}\neq 0$ হয়,
তবে দেখাও যে, $(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$।

গ) যদি $(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$ হয়, তবে দেখাও যে, $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$।

মূলদ ভগ্নাংশ (Rational Fractions)

একটি বহুপদীকে হর এবং একটি বহুপদীকে লব নিয়ে গঠিত ভগ্নাংশকে মূলদ ভগ্নাংশ বলা হয়। যেমন $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)}$ এবং $\dfrac{a^2+a+1}{(a-b)(a-c)}$ মূলদ ভগ্নাংশ।

উদাহরণ ১৯. সরল কর: $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

সমাধান: $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

$$=-\frac{a}{(a-b)(c-a)}-\frac{b}{(b-c)(a-b)}-\frac{c}{(c-a)(b-c)}$$

$$=\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=0$$

উদাহরণ ২০. সরল কর: $\dfrac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2}+\dfrac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2}+\dfrac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$

সমাধান:প্রথম ভগ্নাংশ $= \dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a-b+c)} = \dfrac{a+b-c}{a+b+c}$

দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $= \dfrac{(a+b-c)(b-a+c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \dfrac{b+c-a}{a+b+c}$

তৃতীয় ভগ্নাংশ $= \dfrac{(c+a-b)(c-a+b)}{(a+b+c)(b+c-a)} = \dfrac{c+a-b}{a+b+c}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $\dfrac{a+b-c}{a+b+c} + \dfrac{b+c-a}{a+b+c} + \dfrac{c+a-b}{a+b+c}$

$$= \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

উদাহরণ ২১. সরল কর: $\dfrac{(ax+1)^2}{(x-y)(z-x)} + \dfrac{(ay+1)^2}{(x-y)(y-z)} + \dfrac{(az+1)^2}{(y-z)(z-x)}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $\dfrac{(ax+1)^2}{(x-y)(z-x)} + \dfrac{(ay+1)^2}{(x-y)(y-z)} + \dfrac{(az+1)^2}{(y-z)(z-x)}$

$$= \frac{(ax+1)^2(y-z)+(ay+1)^2(z-x)+(az+1)^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \cdots\cdots (1)$$

এখানে (1) এর লব

$$(a^2x^2+2ax+1)(y-z)+(a^2y^2+2ay+1)(z-x)+(a^2z^2+2az+1)(x-y)$$
$$= a^2\{x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)\}+2a\{x(y-z)+y(z-x)+z(x-y)\}$$
$$+\{(y-z)+(z-x)+(x-y)\}$$

কিন্তু $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y) = -(x-y)(y-z)(z-x)$।

তদুপরি, $x(y-z)+y(z-x)+z(x-y) = 0$ এবং $(y-z)+(z-x)+(x-y) = 0$।

$\therefore$ (1) এর লব $-a^2(x-y)(y-z)(z-x)$।

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{-a^2(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = -a^2$।

উদাহরণ ২২. সরল কর: $\dfrac{1}{x+a} + \dfrac{2x}{x^2+a^2} + \dfrac{4x^3}{x^4+a^4} + \dfrac{8x^7}{a^8-x^8}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশির তৃতীয় ও চতুর্থ পদের যোগফল

$$= \frac{4x^3}{x^4+a^4} + \frac{8x^7}{a^8-x^8} = \frac{4x^3}{x^4+a^4} + \frac{8x^7}{(x^4+a^4)(a^4-x^4)}$$
$$= \frac{4x^3}{x^4+a^4}\left(1+\frac{2x^4}{a^4-x^4}\right) = \frac{4x^3}{x^4+a^4} \times \frac{a^4-x^4+2x^4}{a^4-x^4}$$

$$= \frac{4x^3}{x^4+a^4} \times \frac{a^4+x^4}{a^4-x^4} = \frac{4x^3}{a^4-x^4}$$

$\therefore$ দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পদের যোগফল

$$= \frac{2x}{x^2+a^2} + \frac{4x^3}{a^4-x^4} = \frac{2x}{x^2+a^2}\left[1+\frac{2x^2}{a^2-x^2}\right]$$

$$= \frac{2x}{x^2+a^2} \times \frac{a^2-x^2+2x^2}{a^2-x^2} = \frac{2x}{x^2+a^2} \times \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} = \frac{2x}{a^2-x^2}$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{1}{x+a} + \dfrac{2x}{a^2-x^2} = \dfrac{a-x+2x}{a^2-x^2} = \dfrac{a+x}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{a-x}$

কাজ: সরল কর:

ক) $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$

খ) $\dfrac{a^3-1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^3-1}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^3-1}{(c-a)(c-b)}$

গ) $\dfrac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$

ঘ) $\dfrac{a^3+a^2+1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^3+b^2+1}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^3+c^2+1}{(c-a)(c-b)}$

ঙ) $\dfrac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2+ca}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}$

আংশিক ভগ্নাংশ (Partial Fractions)

যদি কোনো ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা হয়, তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের **আংশিক ভগ্নাংশ** বলা হয়।

যেমন , একটি ভগ্নাংশ $\dfrac{3x-8}{x^2-5x+6}$ কে লেখা যায়:

$$\frac{3x-8}{x^2-5x+6} = \frac{2(x-3)+(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3}$$

এখানে প্রদত্ত ভগ্নাংশটিকে দুইটি ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা হয়েছে। অর্থাৎ, ভগ্নাংশটিকে দুইটি আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত করা হয়েছে।

যদি $N(x)$ ও $D(x)$ উভয়ই x চলকের বহুপদী এবং লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা ছোট হয়, তাহলে ভগ্নাংশটি **প্রকৃত ভগ্নাংশ** (proper fraction) বলা হয়। লব $N(x)$ এর মাত্রা হর $D(x)$ এর মাত্রার সমান অথবা বড় হলে ভগ্নাংশটিকে **অপ্রকৃত ভগ্নাংশ** (improper fraction)

বলা হয়। যেমন, $\dfrac{x^2+1}{(x+1)(x+2)(x-3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ। কিন্তু $\dfrac{2x^4}{x+1}$ ও $\dfrac{x^3+3x^2+2}{x+2}$ উভয়ই অপ্রকৃত ভগ্নাংশ। উল্লেখ্য যে, অপ্রকৃত ভগ্নাংশের লবকে হর দ্বারা সাধারণ নিয়মে ভাগ করে অথবা লবের পদগুলোকে সুবিধাজনকভাবে পুনর্বিন্যাস করে ভগ্নাংশটিকে একটি বহুপদী (ভাগফল) এবং একটি প্রকৃত ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা যায়।

যেমন, $\dfrac{x^3+3x^2+2}{x+2} = (x^2+x-2) + \dfrac{6}{x+2}$

বিভিন্ন ধরনের প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশকে কীভাবে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করা হয়, তা নিচে বর্ণনা করা হলো।

ক) যখন হরে বাস্তব ও একঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্তু সেগুলোর কোনো পুনরাবৃত্তি হয় না।

খ) যখন লবের ঘাত হরের ঘাত অপেক্ষা বৃহত্তর বা সমান হয়, তখন লবকে হর দ্বারা ভাগ করে লবের ঘাত হর অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করতে হয়।

গ) যখন হরে বাস্তব ও একঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং সেগুলোর কয়েকটির পুনরাবৃত্তি হয়।

ঘ) যখন হরে বাস্তব ও দ্বিঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্তু কোনো পুনরাবৃত্তি হয় না।

ঙ) যখন হরে বাস্তব ও দ্বিঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং সেগুলোর কয়েকটির পুনরাবৃত্তি ঘটে।

ক) যখন হরে বাস্তব ও একঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্তু সেগুলোর কোনো পুনরাবৃত্তি হয় না

উদাহরণ ২৩. $\dfrac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: ধরি, $\dfrac{5x-7}{(x-1)(x-2)} \equiv \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} \cdots\cdots (1)$

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-1)(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$5x-7 \equiv A(x-2) + B(x-1) \cdots\cdots (2)$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন (2) এর উভয়পক্ষে $x=1$ বসিয়ে পাই, $5-7 = A(1-2) + B(1-1)$

বা, $-2 = -A, \ \therefore \ A = 2$

আবার, (2) এর উভয়পক্ষে $x=2$ বসিয়ে পাই, $10-7 = A(2-2) + B(2-1)$

বা, $3 = B, \ \therefore \ B = 3$

এখন A এবং B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$\dfrac{5x-7}{(x-1)(x-2)} \equiv \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x-2}$; প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে বিভক্ত হলো।

মন্তব্য: প্রদত্ত ভগ্নাংশটির আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ যে যথাযথ হয়েছে তা পরীক্ষা করা যায়।

ডানপক্ষ = $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}=\frac{2(x-2)+3(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}$ = বামপক্ষ

উদাহরণ ২৪. $\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: ধরি, $\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}\cdots\cdots(1)$

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-1)(x-2)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x+5\equiv A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)\cdots\cdots(2)$

(2) এর উভয়পক্ষ x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(2) এর উভয়পক্ষে $x=1$ বসিয়ে পাই,

$$1+5=A(-1)(-2)\implies 6=2A\implies A=3।$$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে $x=2$ বসিয়ে পাই,

$$2+5=B(1)(-1)\implies 7=-B,\ \therefore\ B=-7।$$

এবং (2) এর উভয়পক্ষে $x=3$ বসিয়ে পাই,

$3+5=C(2)(1)$ বা $8=2C$ বা $C=4$।

এখন, $A,\ B$ এবং C এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}\equiv\frac{3}{x-1}-\frac{7}{x-2}+\frac{4}{x-3}।$$

খ) যখন লবের ঘাত হরের ঘাত অপেক্ষা বৃহত্তর বা সমান হয়, তখন লবকে হর দ্বারা ভাগ করে লবের ঘাত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করতে হয়

উদাহরণ ২৫. $\frac{(x-1)(x-5)}{(x-2)(x-4)}$কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: এখানে লবকে হর দ্বারা ভাগ করলে 1 হয়।

সুতরাং ধরি, $\frac{(x-1)(x-5)}{(x-2)(x-4)}\equiv 1+\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}\cdots\cdots(1)$

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-2)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$(x-1)(x-5)\equiv(x-2)(x-4)+A(x-4)+B(x-2)\cdots\cdots(2)$$

(2) এর উভয়পক্ষে পর্যায়ক্রমে $x=2,\ 4$ বসিয়ে পাই,

$(2-1)(2-5)=A(2-4)$ বা, $A=\frac{3}{2}$

এবং $(4-1)(4-5) = B(4-2)$ বা, $B = \frac{-3}{2}$

এখন A এবং B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{(x-1)(x-5)}{(x-2)(x-4)} \equiv 1 + \frac{3}{2(x-2)} - \frac{3}{2(x-4)},$$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

উদাহরণ ২৬. $\frac{2x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: এখানে লবকে হর দ্বারা ভাগ করলে 2 হয়।

সুতরাং ধরি, $\frac{2x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv 2 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \cdots\cdots (1)$

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-1)(x-2)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2x^3 \equiv 2(x-1)(x-2)(x-3) + A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3)$$
$$+C(x-1)(x-2) \cdots\cdots (2)$$

(2) এর উভয়পক্ষে পর্যায়ক্রমে $x = 1,\ 2,\ 3$ বসিয়ে পাই,

$2 = A(-1)(-2)$ বা, $A = 1$; $16 = B(1)(-1)$ বা, $B = -16$

এবং $54 = C(2)(1)$ বা, $C = \frac{54}{2} = 27$

এখন $A,\ B,\ C$ এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)} \equiv 2 + \frac{1}{x-1} - \frac{16}{x-2} + \frac{27}{x-3}$$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

গ) যখন হরে বাস্তব ও একঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং সেগুলোর কয়েকটির পুনরাবৃত্তি হয়

উদাহরণ ২৭. $\frac{x}{(x-1)^2(x-2)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: ধরি $\frac{x}{(x-1)^2(x-2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-1)^2(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x \equiv A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2 \cdots\cdots (1)$$

(2) এর উভয়পক্ষকে পর্যায়ক্রমে $x = 1,\ 2$ বসিয়ে পাই,

$1 = B(1-2)$ বা, $B = -1$ এবং $2 = C(2-1)^2$ বা, $2 = C \implies C = 2$

আবার, (2) এ x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + C$ বা, $A = -C = -2$

এখন $A,\ B$ এবং C এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{(x-1)^2(x-2)} \equiv \frac{-2}{x-1} + \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-2}$$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

ঘ) যখন হরে বাস্তব ও দ্বিঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে কিন্তু কোনো পুনরাবৃত্তি হয় না:

উদাহরণ ২৮. $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+4)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: ধরি, $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+4)} \equiv \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4} \cdots\cdots (1)$

উভয়পক্ষকে $(x-1)(x^2+4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x \equiv A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1) \cdots\cdots (2)$$

(2) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$1 = A(5) \implies A = \frac{1}{5}$$

x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$$A + B = 0 \cdots (3) \text{ এবং } C - B = 1 \cdots (4)$$

(3) নং এ $A = \dfrac{1}{5}$ বসিয়ে পাই, $B = -\dfrac{1}{5}$।

(4) নং এ $B = -\dfrac{1}{5}$ বসিয়ে পাই, $C = \dfrac{4}{5}$।

এখন, $A,\ B$ ও C এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+4)} \equiv \frac{\frac{1}{5}}{x-1} + \frac{-\frac{x}{5}+\frac{4}{5}}{x^2+4} = \frac{1}{5(x-1)} - \frac{x-4}{5(x^2+4)}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

ঙ) যখন হরে বাস্তব ও দ্বিঘাতবিশিষ্ট উৎপাদক থাকে এবং সেগুলোর কয়েকটির পুনরাবৃত্তি ঘটে

উদাহরণ ২৯. $\dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান: ধরি, $\dfrac{1}{x(x^2+1)^2} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \cdots\cdots (1)$

(1) এর উভয়পক্ষে $x(x^2+1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$\begin{aligned} 1 &\equiv A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)x + (Dx+E)x \\ &\equiv A(x^4+2x^2+1) + (Bx+C)(x^3+x) + Dx^2 + Ex \end{aligned}$$

বা, $1 \equiv Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + Ex \cdots\cdots (2)$

(2) নং এর উভয় পক্ষে $x^4,\ x^3,\ x^2,\ x$ এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 0,\ C = 0,\ 2A + B + D = 0,\ C + E = 0,\ A = 1$।

$C + E = 0$ তে $C = 0$ বসিয়ে পাই $E = 0$।

$A + B = 0$ তে $A = 1$ বসিয়ে পাই $B = -1$।

$2A + B + D = 0$ তে $A = 1$ এবং $B = -1$ বসিয়ে পাই $D = -1$।

$\therefore\ A = 1,\ B = -1,\ C = 0,\ D = -1$ এবং $E = 0$।

(1) নং এ $A,\ B,\ C,\ D$ ও E এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} \equiv \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2},$$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

কাজ: আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

ক) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2-6x}$ খ) $\dfrac{x^2}{x^4+x^2-2}$ গ) $\dfrac{x^3}{x^4+3x^2+2}$

ঘ) $\dfrac{x^2}{(x-1)^3(x-2)}$ ঙ) $\dfrac{1}{1-x^3}$ চ) $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}$

অনুশীলনী ২

১. নিচের কোন রাশিটি প্রতিসম?

ক) $a+b+c$ খ) $xy-yz+zx$ গ) $x^2-y^2+z^2$ ঘ) $2a^2-5bc-c^2$

২. $P(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ হলে

(i) $P(x,y,z)$ চক্রক্রমিক রাশি

(ii) $P(x,y,z)$ প্রতিসম রাশি

(iii) $P(1,-2,1) = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) *i, ii* খ) *i, iii* গ) *ii, iii* ঘ) *i, ii, iii*

x^3+px^2-x-7 এর একটি উৎপাদক $x+7$ হলে নিচের ৩ এবং 4 নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৩. p এর মান কত?

ক) -7 খ) 7 গ) $\frac{54}{7}$ ঘ) 477

৪. বহুপদীটির অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল কত?

ক) $(x-1)(x-1)$ খ) $(x+1)(x-2)$ গ) $(x-1)(x+3)$ ঘ) $(x+1)(x-1)$

৫. $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 2$ হলে, দেখাও যে, $a = 4$।

৬. মনে কর, $P(x) \equiv ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$ যেখানে $a,\ b,\ c$ ধ্রুবক এবং $a \neq 0$। দেখাও যে, $x - r$ যদি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে $P(x)$ এর আরেকটি উৎপাদক হবে $(rx - 1)$।

৭. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

ক) $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

খ) $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$

গ) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

ঘ) $x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$

ঙ) $(x + 1)^2(y - z) + (y + 1)^2(z - x) + (z + 1)^2(x - y)$

চ) $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)$

ছ) $15x^2 + 2xy - 24y^2 - x + 24y - 6$

জ) $15x^2 - 24y^2 - 6z^2 + 2xy - xz + 24yz$

৮. যদি $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ হয়, তবে দেখাও যে, $bc + ca + ab = 0$ অথবা, $a = b = c$।

৯. যদি $x = b + c - a,\ y = c + a - b,$ এবং $z = a + b - c$ হয়, তবে দেখাও যে,

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$।

১০. সরল কর:

ক) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

খ) $\frac{(a+b)^2 - ab}{(b-c)(a-c)} + \frac{(b+c)^2 - bc}{(c-a)(b-a)} + \frac{(c+a)^2 - ab}{(a-b)(c-b)}$

গ) $\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)(x-b)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

ঘ) $\frac{1}{(1+x)} + \frac{2}{(1+x^2)} + \frac{4}{(1+x^4)} + \frac{8}{(1+x^8)} + \frac{16}{(x^{16}-1)}$

১১. আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

ক) $\dfrac{5x+4}{x(x+2)}$ খ) $\dfrac{x+2}{x^2-7x+12}$

গ) $\dfrac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)}$ ঘ) $\dfrac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)}$

ঙ) $\dfrac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2}$

১২. $x,\ y,\ z$ এর একটি বহুপদী, $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$।

ক) দেখাও যে, $F(x,y,z)$ হলো একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

খ) $F(x,y,z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি $F(x,y,z)=0,\ (x+y+z)\neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$।

গ) যদি $x=(b-c+a),\ y=(c+a-b)$ এবং $z=(a+b-c)$ হয়, তবে দেখাও যে, $F(a,b,c):F(x,y,z)=1:4$।

১৩. $P(a,b,c)=(a+b+c)(ab+bc+ca)$ এবং $Q=a^{-3}+b^{-3}+c^{-3}-3a^{-1}b^{-1}c^{-1}$।

ক) $P(a,b,c)$ চক্র-ক্রমিক ও প্রতিসম রাশি কিনা তা কারণসহ উল্লেখ কর।

খ) $Q=0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a=b=c$ অথবা $ab+bc+ca=0$।

গ) $P(a,b,c)=abc$ হলে দেখাও যে, $\dfrac{1}{(a+b+c)^7}=\dfrac{1}{a^7}+\dfrac{1}{b^7}+\dfrac{1}{c^7}$।

১৪. $P(x)=18x^3+bx^2-x-2$ এবং $Q(x)=4x^4+12x^3+7x^2-3x-2$।

ক) $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ ভাগফলটির মাত্রা নির্ণয় কর।

খ) $3x+2,\ P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে b এর মান নির্ণয় কর।

গ) $\dfrac{8x^2-2}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

১৫. চলক x এর দুইটি বহুপদী $P(x)=7x^2-3x+4x^4-a+12x^3$ এবং $Q(x)=6x^3+x^2-9x+26$।

ক) $P(x)$ কে আদর্শরূপে লিখে এর মুখ্য সহগ নির্ণয় কর।

খ) $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(x+2)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

গ) দেখাও যে, $P(x)$ এবং $Q(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক বিদ্যমান।

অধ্যায় ৩

জ্যামিতি (Geometry)

৮ম ও ৯ম-১০ম শ্রেণির জ্যামিতিতে পিথাগোরাসের উপপাদ্য ও এর বিপরীত উপপাদ্য নিয়ে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। গণিত শিক্ষায় এ সংক্রান্ত বিষয়াবলী অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন করে। তাই মাধ্যমিক উচ্চতর গণিতে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের আলোকে অধিকতর আলোচনা আবশ্যক। এ সংক্রান্ত আলোচনার জন্য লম্ব অভিক্ষেপ সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা থাকা দরকার। সে লক্ষে এই পর্যায়ে প্রথম অংশে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের সংক্ষিপ্ত আলোচনা, দ্বিতীয় পর্যায়ে লম্ব অভিক্ষেপের ধারণা এবং পিথাগোরাসের উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত নিয়ে আলোচনা করা হবে। আলোচনার শেষ অংশে পিথাগোরাসের উপপাদ্য এবং এর বিস্তৃতির ধারণার উপর ভিত্তি করে যুক্তিমূলক আলোচনা ও প্রমাণের জন্য কিছু সমস্যা অন্তর্ভুক্ত করা হবে।

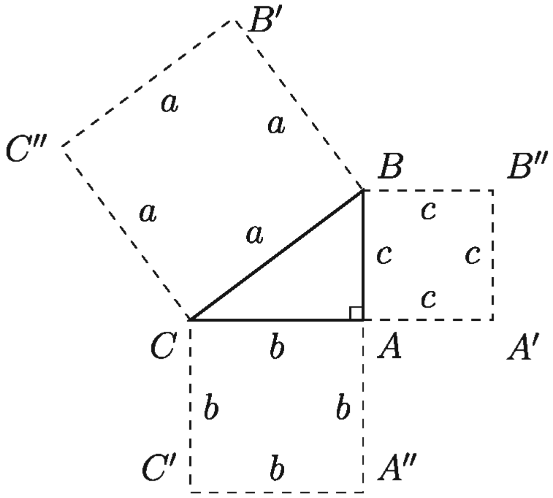
এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা -

- ▶ লম্ব অভিক্ষেপের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ পিথাগোরাসের উপপাদ্যের উপর ভিত্তি করে প্রদত্ত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ▶ ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সম্পর্কিত উপপাদ্যগুলো প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ▶ ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ▶ টলেমির উপপাদ্য প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।

পিথাগোরাস সম্পর্কিত আলোচনা

খ্রিষ্টের জন্মের প্রায় ৬০০ বছর আগে বিখ্যাত গ্রিক পন্ডিত পিথাগোরাস (জন্ম খ্রিষ্টপূর্ব ৫৭০-মৃত্যু খ্রিষ্টপূর্ব ৪৯৫) সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে একটি অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য (theorem) বর্ণনা করেন। এই উপপাদ্যটি তার নামানুসারে পিথাগোরাসের উপপাদ্য বলে পরিচিত। জানা যায় তারও প্রায় ১০০০ বছর আগে মিশরীয় ভূমি জরিপকারীগণের এই উপপাদ্যটি সম্বন্ধে ধারণা ছিল। পিথাগোরাসের উপপাদ্য বিভিন্নভাবে প্রমাণ করা যায়। নিম্ন মাধ্যমিক পর্যায়ে এর দুইটি প্রমাণ দেওয়া আছে। তাই এখানে কোনো প্রমাণ দেওয়া হবে না। এখানে শুধুমাত্র এর বর্ণনা ও কিছু আলোচনা থাকবে।

উপপাদ্য ১ (পিথাগোরাসের উপপাদ্য). একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।



উপরের চিত্রে ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। $\angle BAC$ সমকোণ এবং BC অতিভুজ। BC অতিভুজের উপর কোনো বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করলে তার যে ক্ষেত্রফল হবে সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় AB ও AC এর উপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করলে তাদের ক্ষেত্রফলের যোগফল তার সমান হবে।

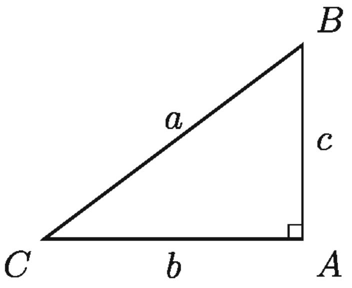
এখানে $BC^2 = BB'C''C$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a^2$, $AB^2 = AA'B''B$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= c^2$, এবং $CA^2 = CC'A''A$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= b^2$।

অতএব $BC^2 = AB^2 + AC^2$ বা $a^2 = b^2 + c^2$।

উদাহরণস্বরূপ, একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য $b = 8$ সে.মি. ও $c = 6$ সে.মি. হলে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের মাধ্যমে বলা যায় এর অতিভুজের দৈর্ঘ্য $a = 10$ সে.মি.।

অনুরূপভাবে, যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য জানা সম্ভব।

উপপাদ্য ২ (পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য). কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ হবে।



উপরের চিত্রে $\triangle ABC$ এর তিনটি বাহু যথাক্রমে AB, BC ও AC। BC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহু AB ও AC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। অর্থাৎ, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ বা, $a^2 = b^2 + c^2$। সুতরাং, $\angle BAC$ একটি সমকোণ। উদাহরণস্বরূপ আমরা বলতে পারি $\triangle ABC$ এর AB, BC ও CA বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. 10 সে.মি. ও 8 সে.মি. হলে $\angle BAC$ অবশ্যই সমকোণ হবে।

যেহেতু, $AB^2 = 6^2$ বর্গ সে.মি. = 36 বর্গ সে.মি.,

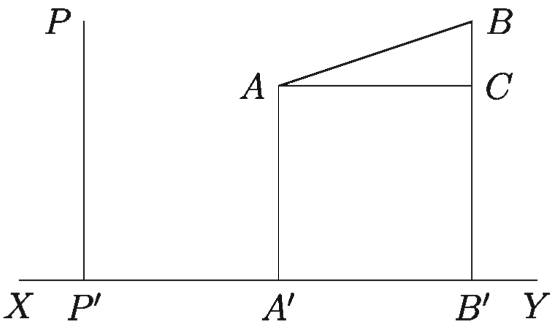
$BC^2 = 10^2$ বর্গ সে.মি. = 100 বর্গ সে.মি.,

$AC^2 = 8^2$ বর্গ সে.মি. = 64 বর্গ সে.মি.,

$\therefore\ BC^2 = 100 = 36 + 64 = AB^2 + AC^2$।

$\therefore\ \angle BAC = 90^\circ$ = এক সমকোণ।

বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection of a Point): কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে বুঝায়। মনে করি, XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং P যেকোনো বিন্দু (নিচের চিত্রে)। P বিন্দু থেকে XY রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব PP' এবং এই লম্বের পাদবিন্দু P'। সুতরাং, P' বিন্দু XY রেখার উপর P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ। কোনো নির্দিষ্ট রেখার উপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু।



রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ (Orthogonal Projection of a Line): ধরি, AB রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় A ও B (উপরের চিত্রে)। এখন A ও B বিন্দু থেকে XY রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে AA' ও BB'। AA' লম্বের পাদবিন্দু A' এবং BB' লম্বের পাদবিন্দু B'। এই $A'B'$ রেখাংশই হচ্ছে XY রেখার উপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ। সুতরাং, দেখা যাচ্ছে লম্ব অঙ্কনের মাধ্যমে অভিক্ষেপ নির্ণয় করা হয়। তাই $A'B'$ রেখাংশকে XY রেখার উপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ বলা হয়। উপরের চিত্রে AB রেখাংশ XY এর সমান্তরাল হলে $AB = A'B'$ হবে। আমরা এ ধারণা থেকে বলতে পারি কোনো সরলরেখার উপর লম্ব যেকোনো সরলরেখার লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। সে ক্ষেত্রে উক্ত লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য হবে শূন্য।

দ্রষ্টব্য:

১. কোনো রেখার উপর কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুই ঐ বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ।

২. কোনো রেখার উপর ঐ রেখার লম্ব রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু যার দৈর্ঘ্য শূন্য।

৩. কোন রেখার উপর ঐ রেখার সমান্তরাল কোনো রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য ঐ রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমান।

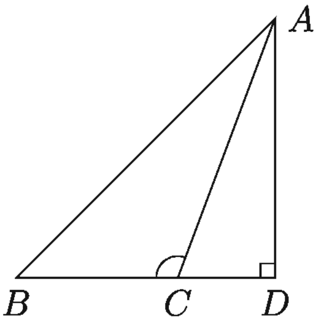
কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্য

পিথাগোরাসের উপপাদ্যের উপর ভিত্তি করে এবং লম্ব অভিক্ষেপের ধারণার সাহায্যে আমরা এখন কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যের যুক্তিমূলক প্রমাণ উপস্থাপন করবো।

উপপাদ্য ৩. স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফল এবং ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি ABC ত্রিভুজের $\angle BCA$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় BC ও AC।

BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD (নিচের চিত্র)। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD$



প্রমাণ: BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD হওয়ায় $\triangle ABD$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADB$ সমকোণ।

সুতরাং পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + BD^2 \\ &= AD^2 + (BC + CD)^2 \qquad [\because BD = BC + CD] \\ &= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2 \cdot BC \cdot CD \end{aligned}$$

$$\therefore AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD \cdots\cdots (1)$$

আবার $\triangle ACD$ সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADC$ সমকোণ।

$$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2 \cdots\cdots (2)$$

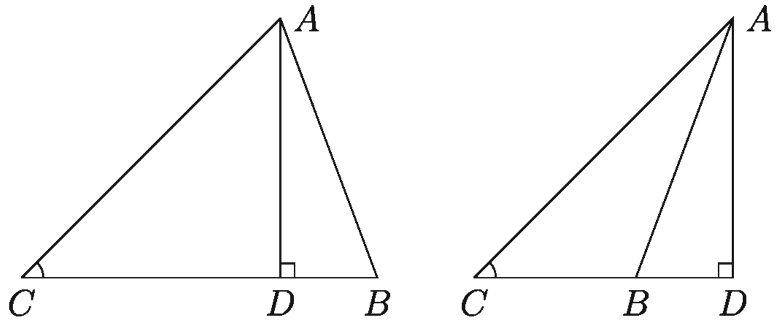
(2) নং সমীকরণ হতে $AD^2 + CD^2 = AC^2$ (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 \cdot BC \cdot CD \qquad \text{[প্রমাণিত]}$$

উপপাদ্য ৪. যেকোনো ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি অপেক্ষা ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার উপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ পরিমাণ কম।

বিশেষ নির্বচন: $\triangle ABC$ ত্রিভুজের $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ এবং সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহু AB। অপর দুই বাহু AC ও BC। মনে করি, BC বাহুর উপর (নিচের বাম পাশের চিত্র) এবং BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর (নিচের ডান পাশের চিত্র) লম্ব AD। তাহলে উভয় ত্রিভুজের ক্ষেত্রে BC বাহুর উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD। প্রমাণ করতে হবে যে $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$।

[উল্লেখ করা দরকার যে এখানে A থেকে BC এর উপর লম্ব টানা হয়েছে। কিন্তু B বিন্দু থেকে AC এর উপর লম্ব অঙ্কনের মাধ্যমেও একইভাবে উপপাদ্যটি প্রমাণ করা যায়।]



প্রমাণ: $\triangle ADB$ সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADB$ সমকোণ।

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে $AB^2 = AD^2 + BD^2 \cdots\cdots (1)$

উপরের বামের চিত্রে $BD = BC - CD$।

$$\therefore BD^2 = (BC - CD)^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$$

উপরের ডানের চিত্রে $BD = CD - BC$।

$$\therefore BD^2 = (CD - BC)^2 = CD^2 + BC^2 - 2 \cdot CD \cdot BC$$

সুতরাং উভয় চিত্রে $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdots\cdots (2)$

এখন সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাওয়া যায়,

$$AB^2 = AD^2 + BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$$

বা, $AB^2 = AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdots\cdots (3)$

আবার $\triangle ADC$ সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle ADC$ সমকোণ।

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে $AC^2 = AD^2 + CD^2 \cdots\cdots (4)$

সমীকরণ (3) ও (4) হতে পাওয়া যায়,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$ [প্রমাণিত]

মন্তব্য:

১. সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সমকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় পরস্পর লম্ব বিধায় তাদের প্রত্যেকটির উপর অপরটির লম্ব অভিক্ষেপ শূন্য। $\angle ACB$ সমকোণ হলে BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ $CD = 0$। সুতরাং $BC \cdot CD = 0$, ফলে $AB^2 = AC^2 + BC^2$

২. উপপাদ্য ৩ ও উপপাদ্য ৪, উপপাদ্য ১ এর ভিত্তির উপর প্রতিষ্ঠিত। তাই উপপাদ্য ৩ ও উপপাদ্য ৪ কে উপপাদ্য ১ অর্থাৎ পিথাগোরাসের উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত বলা যায়।

উপরোক্ত আলোচনা সাপেক্ষে গৃহীত সিদ্ধান্তসমূহ: $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রে,

ক) $\angle ACB$ স্থূলকোণ হলে, $AB^2 > AC^2 + BC^2$ [উপপাদ্য ৩]

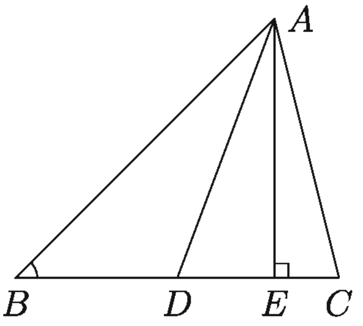
খ) $\angle ACB$ সমকোণ হলে, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ [উপপাদ্য ১]

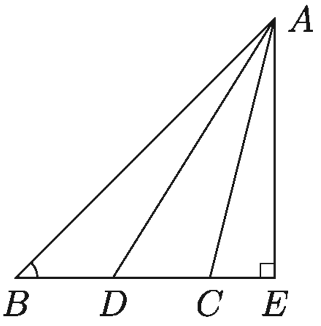
গ) $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ হলে, $AB^2 < AC^2 + BC^2$ [উপপাদ্য ৪]

নিচের উপপাদ্যটি এ্যাপোলোনিয়াস (জন্ম খৃষ্ঠপূর্ব ২৪০-মৃত্যু খৃষ্ঠপূর্ব ১৯০) কর্তৃক বর্ণিত বলে এটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য নামে পরিচিত। এটি পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তার অর্থাৎ উপপাদ্য ৩ ও উপপাদ্য ৪ এর উপর ভিত্তি করে প্রতিষ্ঠিত।

উপপাদ্য ৫ (এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য). ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।

বিশেষ নির্বচন: $\triangle ABC$ এর AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$।





প্রমাণ: BC বাহুর উপর (উপরের বাম পাশের চিত্রে) এবং BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর (উপরের ডান পাশের চিত্রে) AE লম্ব অঙ্কন করি। উভয় চিত্রে $\triangle ABD$ এর $\angle ADB$ স্থূলকোণ এবং BD রেখার বর্ধিতাংশের উপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE।

স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে [উপপাদ্য ৩] আমরা পাই,

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2 \cdot BD \cdot DE \cdots\cdots (1)$$

এখানে, $\triangle ACD$ এর $\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ এবং DC রেখার (উপরের বাম পাশের চিত্রে) এবং DC রেখার বর্ধিতাংশের (উপরের ডান পাশের চিত্রে) উপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE।

সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে [উপপাদ্য ৪] আমরা পাই,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2.CD.DE \cdots\cdots (2)$$

এখন সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই,

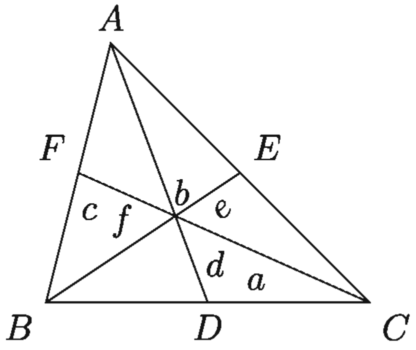
$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + CD^2 + 2 \cdot BD \cdot DE - 2 \cdot CD \cdot DE$$

$$= 2AD^2 + 2BD^2 \quad [\because BD = CD]$$

$$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2) \qquad \text{[প্রমাণিত]}$$

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের মাধ্যমে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক নির্ণয়।

মনে করি, $\triangle ABC$ এর BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c। BC, CA ও AB বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা AD, BE ও CF এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e ও f।



তাহলে, এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য হতে পাই,

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

বা, $c^2 + b^2 = 2\left(d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2\right) \qquad [\because BD = \frac{1}{2}a]$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}a^2$

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{a^2}{2}$

বা, $d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

অনুরূপভাবে পাওয়া যায়, $e^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$ এবং $f^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

সুতরাং বলা যায় কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য জানা থাকলে মধ্যমাসমূহের দৈর্ঘ্য জানা যায়।

আবার, $d^2 + e^2 + f^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

অর্থাৎ, $d^2 + e^2 + f^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

$$\therefore 3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$$

সুতরাং বলা যায় কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির তিনগুণ উক্ত ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির চারগুণের সমান।

ত্রিভুজটি সমকোণী অর্থাৎ $\angle ACB$ সমকোণ এবং AB অতিভুজ হলে

$c^2 = a^2 + b^2$

বা, $a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2$

বা, $\dfrac{4}{3}(d^2 + e^2 + f^2) = 2c^2$

বা, $2(d^2 + e^2 + f^2) = 3c^2$

সুতরাং, বলা যায় সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিনগুণের সমান।

অনুশীলনী ৩.১

১. $\triangle ABC$ এর $\angle B = 60^\circ$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB \cdot BC$।

২. $\triangle ABC$ এর $\angle B = 120^\circ$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB \cdot BC$।

৩. $\triangle ABC$ এর $\angle C = 90^\circ$ এবং BC এর মধ্যবিন্দু D। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$।

৪. $\triangle ABC$ এ AD, BC বাহুর উপর লম্ব এবং BE, AC এর উপর লম্ব। দেখাও যে, $BC \cdot CD = AC \cdot CE$।

৫. $\triangle ABC$ এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$।

[সংকেত: $BP = PQ = QC$; $\triangle ABQ$ এর মধ্যমা AP।

$AB^2 + AQ^2 = 2(BP^2 + AP^2) = 2PQ^2 + 2AP^2$।

$\triangle APC$ এর মধ্যমা AQ। $\therefore AP^2 + AC^2 = 2PQ^2 + 2AQ^2$।]

৬. $\triangle ABC$ এর $AB = AC$। ভূমি BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AP^2 = BP \cdot PC$। [সংকেত: BC এর উপর AD লম্ব আঁক। তাহলে $AB^2 = BD^2 + AD^2$ এবং $AP^2 = PD^2 + AD^2$।]

৭. $\triangle ABC$ এর মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$।

[সংকেত: এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের আলোকে গৃহীত সিদ্ধান্তসমূহ ব্যবহার করতে হবে অর্থাৎ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য ও মধ্যমার সম্পর্ক ব্যবহার করতে হবে।]

ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক উপপাদ্য

এই অংশে ত্রিভুজ ও বৃত্ত বিষয়ক কয়েকটি গুরুত্বপূর্ণ উপপাদ্যের যুক্তিমূলক প্রমাণ উপস্থাপন করা হবে। উপপাদ্যসমূহ প্রমাণের জন্য দুইটি ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কে পূর্বজ্ঞান থাকা আবশ্যক। মাধ্যমিক জ্যামিতিতে ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। শিক্ষার্থীদের সুবিধার্থে ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কে সংক্ষেপে আলোচনা করা হলো।

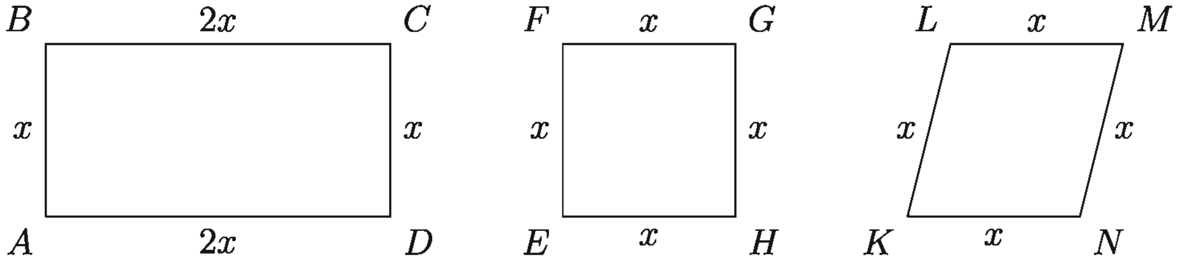
কোণের ক্ষেত্রে সদৃশতা: সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি যথাক্রমে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে **সদৃশকোণী বহুভুজ** বলা হয়।

বাহুর অনুপাতের ক্ষেত্রে সদৃশতা: সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষ বিন্দুগুলোকে যদি যথাক্রমে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির

ক) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং

খ) অনুরূপ দুইটি বাহুর অনুপাত সমান হয়

তবে বহুভুজ দুইটিকে **সদৃশ (similar) বহুভুজ** বলা হয়।



উপরের চিত্রে লক্ষ করলে দেখব যে,

ক) আয়ত $ABCD$ ও বর্গ $EFGH$ সদৃশ নয় যদিও তারা সদৃশকোণী। সবগুলো কোণই সমকোণ কিন্তু অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান নয়।

খ) বর্গ $EFGH$ ও রম্বস $KLMN$ সদৃশ নয় যদিও তাদের শীর্ষবিন্দুগুলোর যেকোনো ধারাবাহিক মিলকরণের ফলে অনুরূপ বাহু দুইটির অনুপাতগুলো সমান কিন্তু অনুরূপ কোণগুলো সমান নয়।

দুইটি ত্রিভুজের বেলায় অবশ্য এ রকম হয় না। দুইটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোর কোণ মিলকরণের ফলে যদি সদৃশতার সংজ্ঞায় উল্লেখিত শর্ত দুইটির একটি সত্য হয়, তবে অপরটিও সত্য হয় এবং ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হয়। এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে,

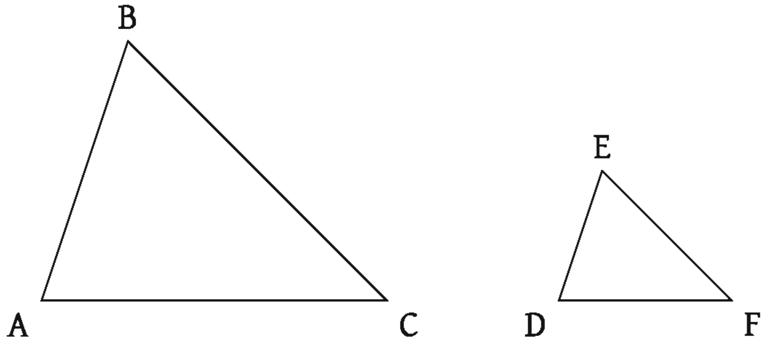
ক) দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে সমান কোণ দুইটিকে **অনুরূপ কোণ** এবং অনুরূপ কোণের বিপরীত বাহু দুইটিকে **অনুরূপ বাহু** ধরা হয়।

খ) দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু অপরটির দুই বাহুর সমানুপাতিক হলে, আনুপাতিক বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু এবং অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণ দুইটিকে **অনুরূপ কোণ** ধরা হয়।

গ) উভয়ক্ষেত্রে অনুরূপ কোণগুলোর শীর্ষবিন্দু মিল করে ত্রিভুজ দুইটি বর্ণনা করা হয়। যেমন, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর অনুরূপ কোণগুলো হচ্ছে $\angle A$ ও $\angle D$, $\angle B$ ও $\angle E$, $\angle C$ ও $\angle F$ এবং অনুরূপ বাহুগুলো হচ্ছে AB ও DE, AC ও DF, BC ও EF।

দুইটি ত্রিভুজের সদৃশতা সম্পর্কিত কয়েকটি উপপাদ্যের সংক্ষিপ্ত বর্ণনা দেওয়া হলো।

উপপাদ্য ৬. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।



উপরের চিত্রে $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশকোণী ত্রিভুজ।

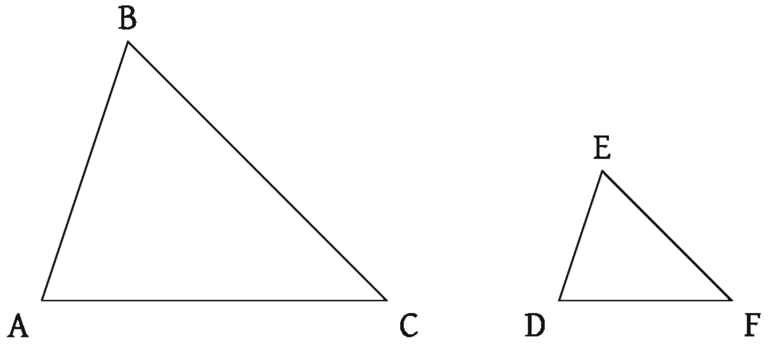
অর্থাৎ, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$ হওয়ায় $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ হবে।

অর্থাৎ অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ১. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে, তারা সদৃশ হয়।

মন্তব্য: দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই কোণ অপরটির দুই কোণের সমান হলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী এবং এর ফলে এগুলো সদৃশ হয়। কারণ যেকোনো ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

উপপাদ্য ৭. দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো পরস্পরের সমানুপাতিক হলে অনুরূপ বাহুগুলোর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হয়।

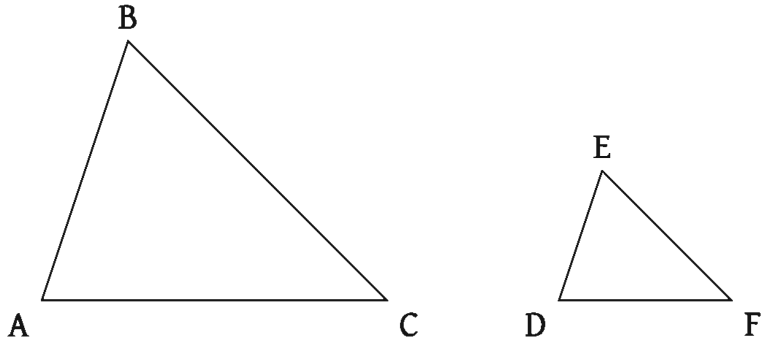


উপরের চিত্রে $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর বাহুগুলো সমানুপাতিক অর্থাৎ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$ হওয়ায় ত্রিভুজদ্বয়ের কোণগুলো পরস্পর সমান। সুতরাং, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$।

উপপাদ্য ৬ কে উপপাদ্য ৭ এর বিপরীত উপপাদ্য বলা যেতে পারে।

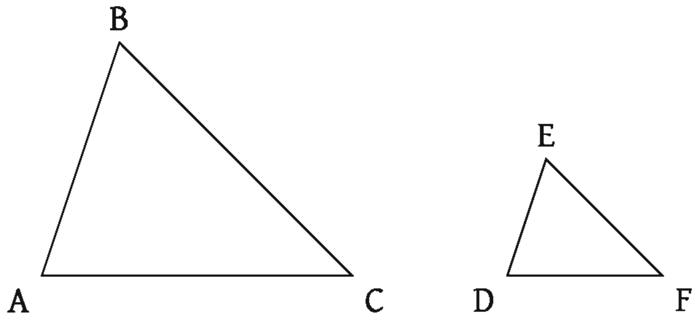
উপপাদ্য ৮. দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান এবং সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে।

নিচের চিত্রের $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ এর $\angle A = \angle D$ এবং সমান কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় AB, AC এবং DE, DF সমানুপাতিক। অর্থাৎ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ হওয়ায় $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ সদৃশ।



উপপাদ্য ৯. দুইটি সদৃশ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত তাদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান।

নিচের চিত্রের $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ। ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু BC ও EF। এই অবস্থায় ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত BC ও EF বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান। অর্থাৎ, $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$। একইভাবে ত্রিভুজ দুইটির AB ও DE এবং AC ও DF অনুরূপ হলে, $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2}$।



ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু

এখানে উল্লেখ্য, কোনো ত্রিভুজের লম্ববিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর লম্ব দূরত্বের দ্বিগুণ।

ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র: ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে ত্রিভুজের **পরিকেন্দ্র** বলে। উল্লেখ্য, তৃতীয় বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডকও ঐ বিন্দুগামী।

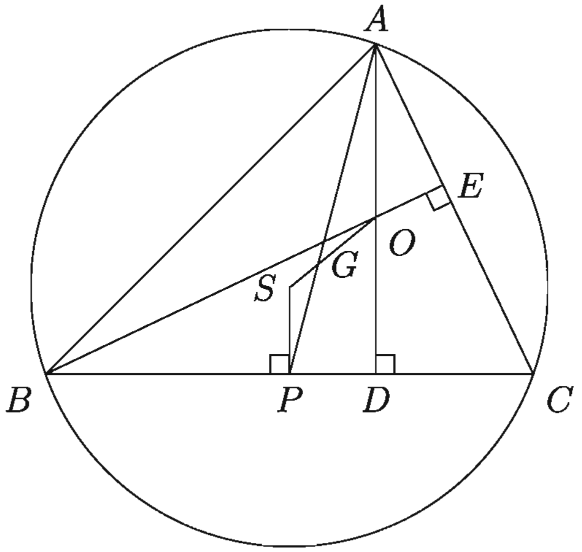
ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র: ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ত্রিভুজটির **ভরকেন্দ্র** বলা

হয়। ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রে মধ্যমাগুলো $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত হয়।

ত্রিভুজের লম্ববিন্দু: ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাই **লম্ববিন্দু**।

উপপাদ্য ১০. ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, $\triangle ABC$ এর লম্ববিন্দু O, পরিকেন্দ্র S এবং AP একটি মধ্যমা। লম্ববিন্দু O এবং পরিকেন্দ্র S এর সংযোগ রেখা AP মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। S, P যোগ করলে SP রেখা BC এর উপর লম্ব। তাহলে, G বিন্দুটি $\triangle ABC$ এর ভরকেন্দ্র এটি প্রমাণ করাই যথেষ্ট।



প্রমাণ: $\triangle ABC$ এর লম্ববিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্ব OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব SP। $\therefore OA = 2SP \cdots\cdots (1)$

এখন যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর উপর লম্ব সেহেতু $AD \parallel SP$। এখন $AD \parallel SP$ এবং AP এদের ছেদক। সুতরাং একান্তর কোণ হওয়ায় $\angle PAD = \angle APS$, অর্থাৎ, $\angle OAG = \angle SPG$।

এখন $\triangle AGO$ এবং $\triangle PGS$ এর মধ্যে

$\angle AGO = \angle PGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OAG = \angle SPG$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AOG$ = অবশিষ্ট $\angle PSG$

$\therefore \triangle AGO$ এবং $\triangle PGS$ সদৃশকোণী।

সুতরাং, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{OA}{SP}$ অর্থাৎ, $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{2SP}{SP}$ [(1) নং সমীকরণ হতে]

অতএব $\dfrac{AG}{GP} = \dfrac{2}{1}$ বা, $AG : GP = 2:1$

অর্থাৎ, G বিন্দু AP মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করেছে।

$\therefore G$ বিন্দু $\triangle ABC$ এর ভরকেন্দ্র। [প্রমাণিত]

দ্রষ্টব্য:

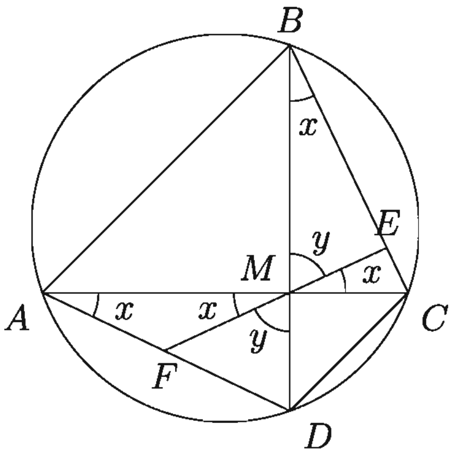
ক) **নববিন্দুবৃত্ত (Nine Point Circle):** কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুত্রয়, শীর্ষবিন্দুগুলো থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয় এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্যবিন্দুত্রয়, সর্বমোট এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থান করে। এই বৃত্তকেই **নববিন্দুবৃত্ত** বলে।

খ) ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজনকারী রেখাংশের মধ্যবিন্দুই নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র।

গ) নববিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান।

উপপাদ্য ১১ (ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য). বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি যদি পরস্পর লম্ব হয়, তবে তাদের ছেদ বিন্দু হতে কোনো বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব বিপরীত বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করে।

বিশেষ নির্বচন: বৃত্তে অন্তর্লিখিত $ABCD$ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পরকে লম্বভাবে M বিন্দুতে ছেদ করে। M হতে BC বাহুর উপর ME লম্ব এবং বর্ধিত EM বিপরীত AD বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে $AF = FD$।



প্রমাণ: একই চাপ CD এর উপর দন্ডায়মান বলে $\angle CBD = \angle CAD$

অর্থাৎ, $\angle CBM = \angle MAF$

আবার, $\angle CBM = \angle CME$ [উভয়ে একই $\angle BME$ এর পূরক কোণ বলে]

সুতরাং $\angle MAF = \angle FMA$

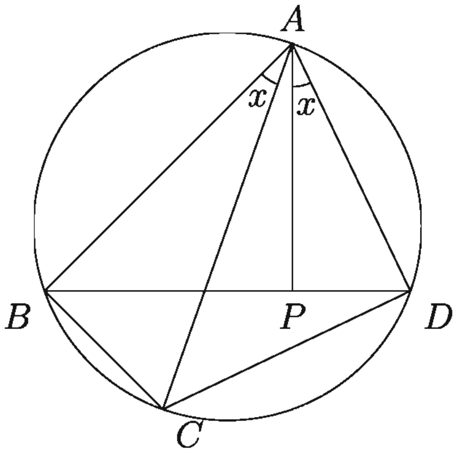
ফলে $\triangle AFM$ ত্রিভুজে $AF = FM$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $\angle FDM = \angle BCM = \angle BME = \angle DMF$

ফলে, $\triangle DFM$ ত্রিভুজে $FD = FM$

সুতরাং $AF = FD$ [প্রমাণিত]

উপপাদ্য ১২ (টলেমির উপপাদ্য). বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।



বিশেষ নির্বচন: মনে করি বৃত্তে অন্তর্লিখিত $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও CD এবং BC ও AD। AC এবং BD চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$।

প্রমাণ: $\angle BAC$ কে $\angle DAC$ থেকে ছোট ধরে নিয়ে A বিন্দুতে AD রেখাংশের সাথে $\angle BAC$ এর সমান করে $\angle DAP$ আঁকি যেন AP রেখা BD কর্ণকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

অঙ্কন অনুসারে $\angle BAC = \angle DAP$।

উভয়পক্ষে $\angle CAP$ যোগ করে পাই,

$\angle BAC + \angle CAP = \angle DAP + \angle CAP$ অর্থাৎ, $\angle BAP = \angle CAD$

এখন $\triangle ABP$ ও $\triangle ACD$ এর মধ্যে

$\angle BAP = \angle CAD$ এবং $\angle ABD = \angle ACD$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle APB$ = অবশিষ্ট $\angle ADC$।

$\therefore \triangle ABP$ ও $\triangle ACD$ সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{BP}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

অর্থাৎ, $AC \cdot BP = AB \cdot CD \cdots\cdots (1)$

আবার, $\triangle ABC$ ও $\triangle APD$ এর মধ্যে

$\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle ADP = \angle ACB$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle ABC =$ অবশিষ্ট $\angle APD$

$\therefore \triangle ABC$ ও $\triangle APD$ সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{PD}{BC}$$

অর্থাৎ, $AC \cdot PD = BC \cdot AD \quad \cdots\cdots (2)$

এখন সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই,

$$AC \cdot BP + AC \cdot PD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

বা, $AC(BP + PD) = AB \cdot CD + BC \cdot AD$

কিন্তু $BP + PD = BD$

ফলে $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ ১. $\triangle PQR$ এ $\angle PQR = 90°$ এবং PQ, QR ও PR বাহু তিনটির মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F।

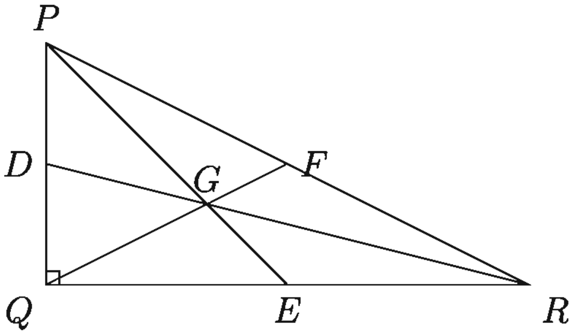
ক) তথ্যানুযায়ী চিত্র এঁকে ভরকেন্দ্র চিহ্নিত কর।

খ) প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PE^2 + QE^2 + 2RE^2$।

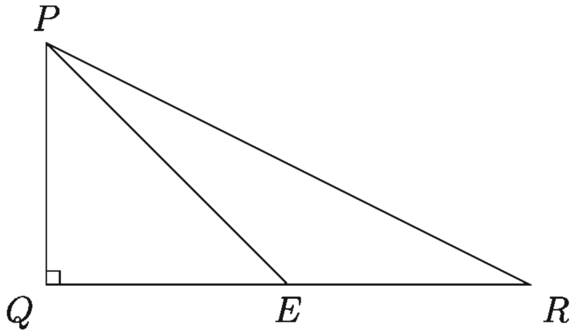
গ) $QF \perp PR$ হলে প্রমাণ কর যে, $QF^2 = PF \cdot RF$।

সমাধান:

ক) নিচের চিত্রে PQ, QR ও PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F হওয়ায় PE, QF এবং DR মধ্যমা। PE, QF এবং DR মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\therefore G$ বিন্দু ভরকেন্দ্র।



খ) $\angle PQR = 90°$ এবং $\triangle PQR$ এ QR এর মধ্যবিন্দু E। P, E যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 = PE^2 + QE^2 + 2RE^2$।



প্রমাণ: $\triangle PQE$ এ $\angle PQE = 90^\circ$ এবং PE অতিভুজ

$\therefore PE^2 = PQ^2 + QE^2 \cdots\cdots (1)$

আবার, $\triangle PQR$ এ $\angle PQR = 90^\circ$ এবং PR অতিভুজ

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2$

বা, $PR^2 = PQ^2 + (QE + RE)^2$

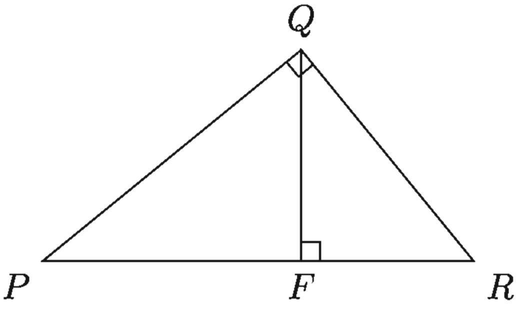
বা, $PR^2 = PQ^2 + QE^2 + RE^2 + 2QE \cdot RE$

বা, $PR^2 = PQ^2 + QE^2 + QE^2 + 2RE \cdot RE$ $[\because QE = RE]$

বা, $PR^2 = PE^2 + QE^2 + 2RE^2$ [(1) নং এর সাহায্যে]

$\therefore PR^2 = PE^2 + QE^2 + 2RE^2$ [প্রমাণিত]

গ) $\triangle PQR$ এ $\angle PQR = 90^\circ$ এবং $QF \perp PR$। প্রমাণ করতে হবে যে, $QF^2 = PF \cdot RF$।



প্রমাণ: $\angle PQR = 90^\circ$

$\therefore \angle PQF + \angle FQR = 90^\circ \cdots\cdots (1)$

আবার, $QF \perp PR$ বলে $\angle PFQ = \angle QFR = 90^\circ$

$\triangle PQF$ এ $\angle PFQ + \angle PQF + \angle QPF = 180^\circ$

বা, $90^\circ + \angle PQF + \angle QPF = 180^\circ$

$\therefore \angle PQF + \angle QPF = 90^\circ \cdots\cdots (2)$

(1) নং এবং (2) নং হতে পাই

$$\angle PQF + \angle FQR = \angle PQF + \angle QPF$$

$$\therefore \angle FQR = \angle QPF$$

$\triangle PQF$ এবং $\triangle QFR$ এ

$$\angle PFQ = \angle QFR, \angle QPF = \angle FQR$$

অবশিষ্ট $\angle PQF =$ অবশিষ্ট $\angle FRQ$

$\therefore \triangle PQF$ এবং $\triangle QFR$ সদৃশ

$$\therefore \frac{PQ}{QR} = \frac{QF}{FR} = \frac{PF}{FQ}$$

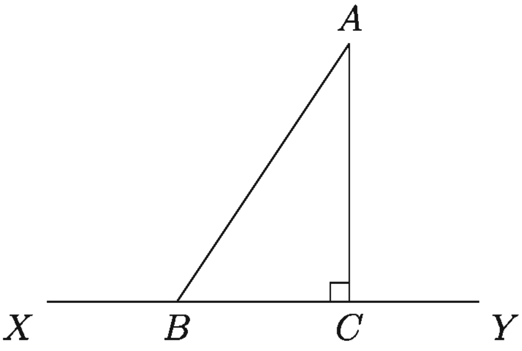
অর্থাৎ $\dfrac{QF}{RF} = \dfrac{PF}{QF}$

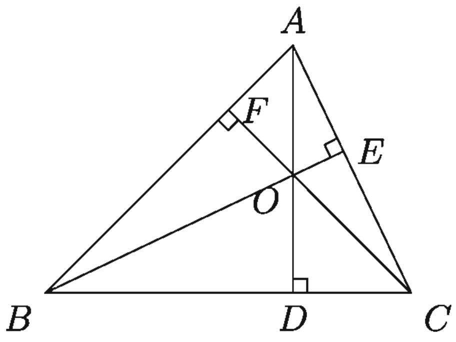
বা, $QF^2 = PF \cdot RF$ [প্রমাণিত]

অনুশীলনী ৩.২

১. নিচের বামের চিত্রে XY রেখাংশে AB এর লম্ব অভিক্ষেপ কোনটি?

ক) AB খ) BC গ) AC ঘ) XY



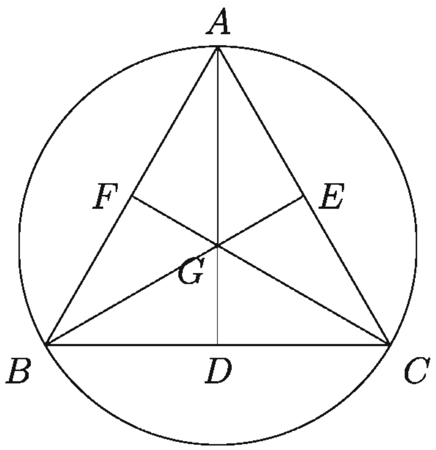


২. উপরের ডানের চিত্রে কোনটি লম্ববিন্দু?

ক) D খ) E গ) F ঘ) O

৩. একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি মধ্যমার দৈর্ঘ্য 3 সে.মি. হলে প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

ক) 4.5 সে.মি. খ) 3.46 সে.মি. গ) 4.24 সে.মি. ঘ) 2.59 সে.মি.



উপরের চিত্রে D, E, F যথাক্রমে BC, AC ও AB এর মধ্যবিন্দু। সেই আলোকে ৪-৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৪. G বিন্দুর নাম কী?

ক) লম্ববিন্দু খ) অন্তঃকেন্দ্র গ) ভরকেন্দ্র ঘ) পরিকেন্দ্র

৫. $\triangle ABC$ এর শীর্ষ বিন্দু তিনটি দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের নাম কী?

ক) পরিবৃত্ত খ) অন্তর্বৃত্ত গ) বহির্বৃত্ত ঘ) নববিন্দুবৃত্ত

৬. $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যকে সমর্থন করে?

ক) $AB^2 + AC^2 = BC^2$ খ) $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

গ) $AB^2 + AC^2 = 2(AG^2 + GD^2)$ ঘ) $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + CD^2)$

৭. ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ যেকোনো বিন্দু P থেকে BC ও CA এর উপর PD ও PE লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। যদি ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, PO রেখা AB এর উপর লম্ব, অর্থাৎ $PO \perp AB$।

৮. $\triangle ABC$ এর $\angle C$ সমকোণ। C থেকে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্ব CD হলে, প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD \cdot BD$।

৯. $\triangle ABC$ এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর উপর লম্ব AD, BE ও CF রেখাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AO \cdot OD = BO \cdot OE = CO \cdot OF$।

[সংকেত: $\triangle BOF$ এবং $\triangle COE$ সদৃশ। $\therefore BO : CO = OF : OE$।]

১০. AB ব্যাসের উপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের দুইটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP$।

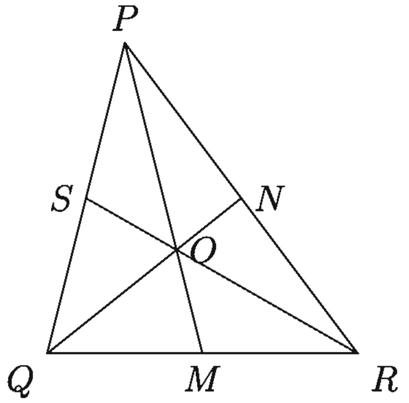
১১. কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১২. ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হতে ভূমি BC এর উপর অঙ্কিত লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 2R \cdot AD$।

১৩. ABC ত্রিভুজের $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে এবং ABC পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, $AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$।

১৪. ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর উপর যথাক্রমে BE ও CF লম্ব। দেখাও যে, $\triangle ABC : \triangle AEF = AB^2 : AE^2$।

১৫. $\triangle PQR$ এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

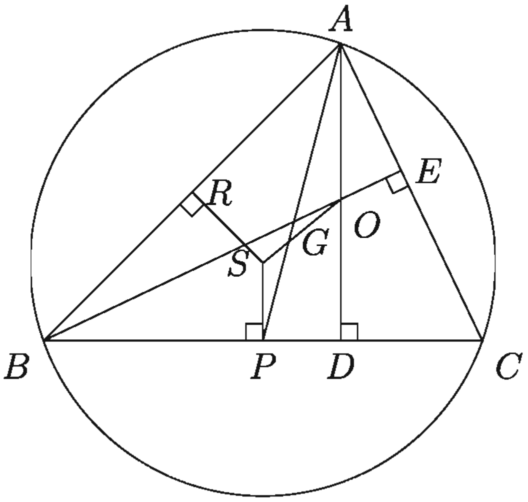


ক) O বিন্দুটির নাম কী? O বিন্দু PM কে কী অনুপাতে বিভক্ত করে?

খ) $\triangle PQR$ হতে $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত কর।

গ) দেখাও যে, $\triangle PQR$ এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণ।

১৬. নিচের চিত্রে S, O যথাক্রমে $\triangle ABC$ এর পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, $BC = a$, $AC = b$ এবং $AB = c$।



ক) OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

খ) দেখাও যে, S, G, O একই সরল রেখায় অবস্থিত।

গ) $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে $a \cdot CD = b \cdot CE$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত কর।

অধ্যায় ৪

জ্যামিতিক অঙ্কন (Geometric Drawing)

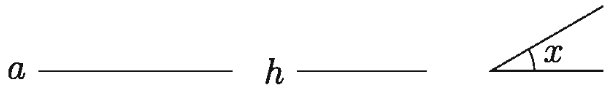
কম্পাস ও রুলার ব্যবহার করে দেওয়া নির্দিষ্ট শর্ত অনুযায়ী যে চিত্র অঙ্কন করা হয়, তাহাই জ্যামিতিক অঙ্কন। উপপাদ্য প্রমাণের জন্য যে চিত্র অঙ্কন করা হয় তা যথাযথ (accurate) হওয়া খুব জরুরী নয়। সম্পাদ্যের ক্ষেত্রে জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কন যথাযথ হওয়া খুবই প্রয়োজন।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা -

- ▶ প্রদত্ত তথ্য ও উপাত্তের ভিত্তিতে ত্রিভুজ অঙ্কন এবং অঙ্কনের যথার্থতা যাচাই করতে পারবে।
- ▶ প্রদত্ত তথ্য ও উপাত্তের ভিত্তিতে বৃত্ত অঙ্কন এবং অঙ্কনের যথার্থতা যাচাই করতে পারবে।

ত্রিভুজ সংক্রান্ত কতিপয় সম্পাদ্য

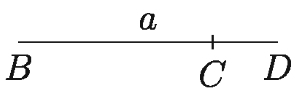
সম্পাদ্য ১. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও উচ্চতা দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।



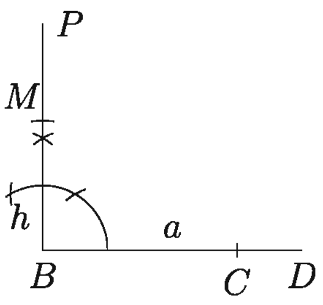
মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a, উচ্চতা h এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন:

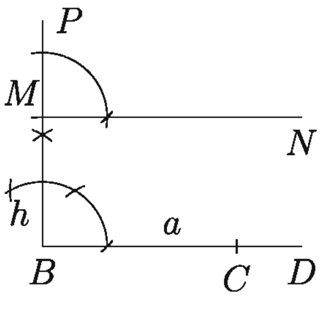
ধাপ ১. যেকোনো রেখা BD থেকে $BC = a$ অংশ কেটে নিই।



ধাপ ২. B বিন্দুতে BC এর উপর লম্ব BP আঁকি। BP থেকে $BM = h$ কেটে নিই।

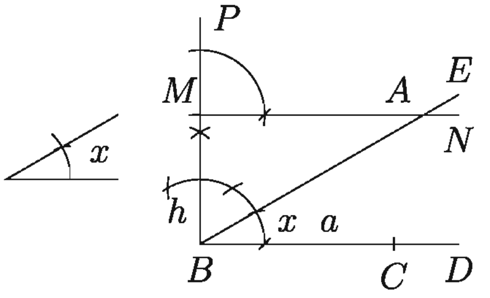


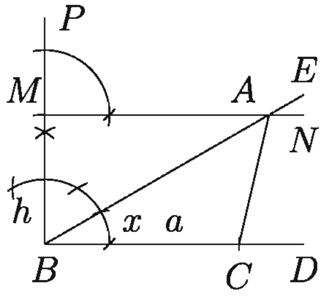
ধাপ ৩. M বিন্দুতে $MN \parallel BC$ অঙ্কন করি।



ধাপ ৪. আবার B বিন্দুতে প্রদত্ত $\angle x$ এর সমান করে $\angle CBE$ অঙ্কন করি। BE রেখাংশ MN কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৫. A, C যোগ করি। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

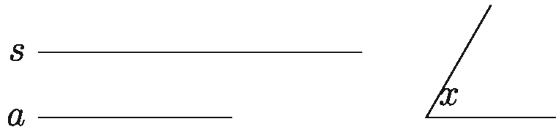




প্রমাণ: $MN \parallel BC$ (অঙ্কনানুসারে)। $\therefore$ ABC এর উচ্চতা $BM = h$। আবার, $BC = a$ এবং $\angle ABC = \angle x$। $\therefore$ $\triangle ABC$-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

বিশ্লেষণ: ভূমি ও ভূমি সংলগ্ন কোণ দেয়া আছে। সুতরাং একটি সরলরেখা থেকে ভূমির সমান অংশ কেটে নিয়ে তার এক প্রান্তে প্রদত্ত কোণের সমান কোণ আঁকতে হবে। অতঃপর ভূমির সঙ্গে নির্দিষ্ট কোণে আনত নতুন অঙ্কিত রেখার উপর এমন একটা বিন্দু নির্ণয় করতে হবে যেন ভূমি থেকে ঐ বিন্দুটির উচ্চতা ত্রিভুজের উচ্চতার সমান হয়।

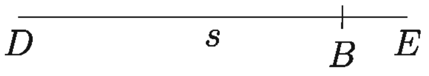
সম্পাদ্য ২. ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।



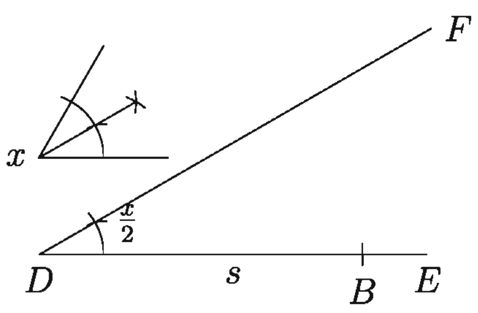
মনে করি, একটি ত্রিভুজের ভূমি a, অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি s এবং শিরঃকোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন:

ধাপ ১. যেকোনো রেখা DE থেকে $DB = s$ অংশ কেটে নিই।

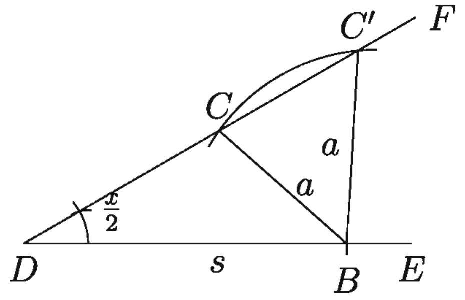


ধাপ ২. DB রেখার D বিন্দুতে $\angle BDF = \frac{1}{2}\angle x$ অঙ্কন করি।

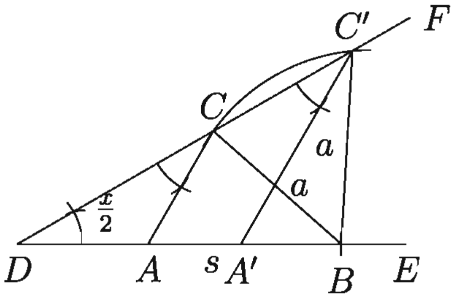


ধাপ ৩. B কে কেন্দ্র করে ভূমি a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি যা DF কে C ও C' বিন্দুতে ছেদ করে। B,C ও B,C' যোগ করি।

২০১৬



ধাপ ৪. C বিন্দুতে $\angle BDF$ এর সমান $\angle DCA$ ও C' বিন্দুতে $\angle BDF$ এর সমান $\angle DC'A'$ অঙ্কন করি। CA ও $C'A'$ রেখা দুইটি BD কে যথাক্রমে A ও A' বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC ও $A'BC'$ ত্রিভুজদ্বয় উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।



প্রমাণ: যেহেতু $\angle ACD = \angle ADC = \angle A'C'D = \frac{1}{2}\angle x$ (অঙ্কনানুসারে)

$$\therefore \angle BAC = \angle ADC + \angle ACD = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$$

$$\therefore \angle BA'C' = \angle A'DC' + \angle A'C'D = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$$

এবং $AC = AD$, $A'C' = A'D$

ABC ত্রিভুজে,

$\angle BAC = \angle x$, $BC = a$ এবং $CA + AB = DA + AB = DB = s$

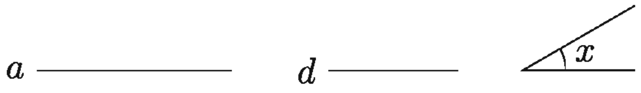
$\therefore \triangle ABC$-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

আবার $A'BC'$ ত্রিভুজে,

$\angle BA'C' = \angle x$, $BC' = a$ এবং $C'A' + A'B = DA' + A'B = DB = s$

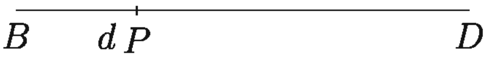
$\therefore \triangle A'BC'$-ই অপর উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য ৩. ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।



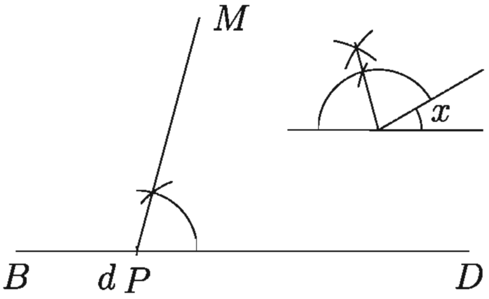
মনে করি, একটি ত্রিভুজের ভূমি a, অপর দুই বাহুর অন্তর d এবং শিরঃকোণ x দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কন:

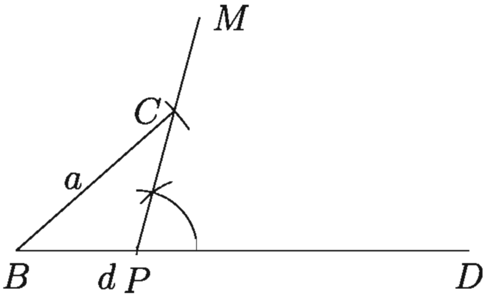


ধাপ ১. যেকোনো রেখা BD থেকে $BP = d$ অংশ কেটে নিই।

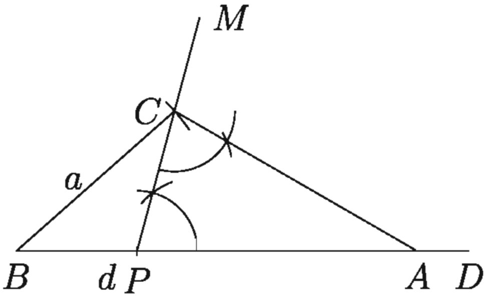
ধাপ ২. P বিন্দুতে $\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের সমান $\angle DPM$ অঙ্কন করি।



ধাপ ৩. B কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তচাপ PM সরলরেখাকে C বিন্দুতে ছেদ করে। B ও C যোগ করি।



ধাপ ৪. আবার C বিন্দুতে $\angle DPC = \angle PCA$ কোণ অঙ্কন করি যেন CA রেখাংশ BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।



প্রমাণ: $\angle APC = \angle ACP$

$\therefore AP = AC$

$\therefore AB - AC = AB - AP = d$

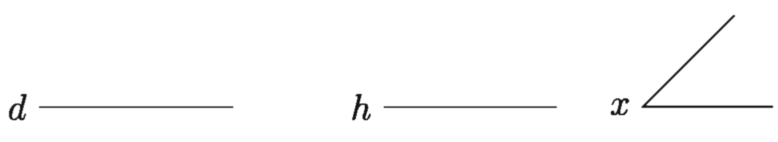
আবার $\angle APC = \angle ACP = \angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেক।

$\therefore \angle APC + \angle ACP = \angle x$ এর সম্পূরক $=$ বহিঃস্থ $\angle CAD$ = $\angle CAB$ এর সম্পূরক।

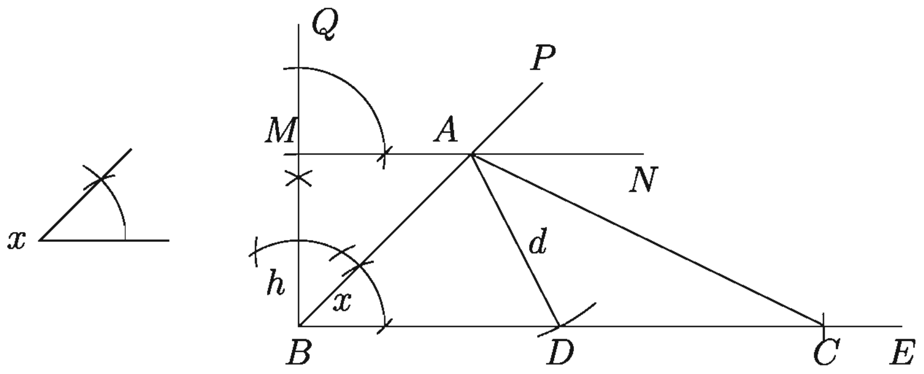
$\therefore \angle A = \angle CAB = \angle x$

$\therefore ABC$-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য ৪. ত্রিভুজের উচ্চতা, ভূমির উপর মধ্যমা এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



মনে করি, ত্রিভুজের উচ্চতা h, ভূমির ওপর মধ্যমা d এবং ভূমি সংলগ্ন একটি $\angle x$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



অঙ্কন:

ধাপ ১. যেকোনো রেখা BE এর B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle EBP$ অঙ্কন করি।

ধাপ ২. B বিন্দুতে BE রেখার ওপর BQ লম্ব অঙ্কন করি।

ধাপ ৩. BQ থেকে ত্রিভুজের উচ্চতা h এর সমান BM অংশ কেটে নিই।

ধাপ ৪. M বিন্দুতে $MN \parallel BE$ অঙ্কন করি যা BP কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৫. A বিন্দুকে কেন্দ্র করে মধ্যমা d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি। ঐ বৃত্তচাপ BE কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৬. BE থেকে $DC = BD$ অংশ কেটে নিই। A ও C যোগ করি।

তাহলে, $\triangle ABC$-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: $BD = DC \quad \therefore D$ বিন্দুই BC এর মধ্যবিন্দু।

A, D যোগ করি। $\therefore AD = d =$ ভূমির উপর অঙ্কিত মধ্যমা, অর্থাৎ, BC ভূমি।

MN ও BE সমান্তরাল। সুতরাং $\triangle ABC$ এর উচ্চতা $BM = h$।

আবার, $\angle ABC = \angle x =$ ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ।

$\therefore ABC$-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

মন্তব্য: $\angle x$ এর উপর নির্ভর করে অনেক ক্ষেত্রে দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যেতে পারে। এছাড়াও মধ্যমার দৈর্ঘ্য উচ্চতার থেকে কম হলে অঙ্কন করা যাবে না।

উদাহরণ ১. ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য 5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন কোণ 60° এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি 7 সে.মি.। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: দেওয়া আছে ভূমি $BC = 5$ সে.মি. অপর দুই বাহুর সমষ্টি $AB + AC = 7$ সে.মি. এবং $\angle ABC = 60^\circ$। $\triangle ABC$ অঙ্কন করতে হবে।

ধাপ ১. যেকোনো রেখা BX থেকে $BC = 5$ সে.মি. কেটে নিই।

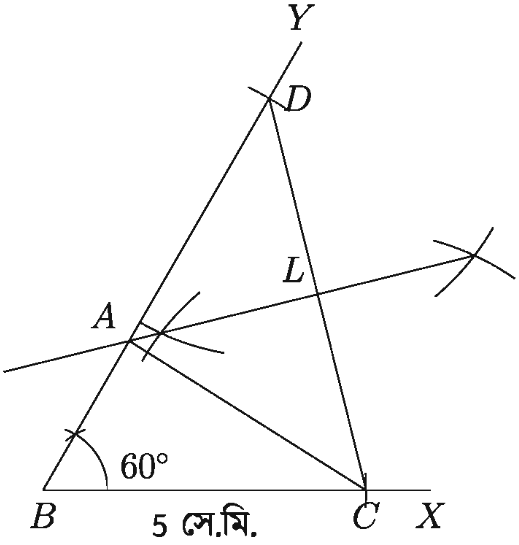
ধাপ ২. $\angle XBY = 60^\circ$ আঁকি।

ধাপ ৩. BY রেখা থেকে $BD = 7$ সে.মি. কেটে নিই।

ধাপ ৪. C, D যোগ করি।

ধাপ ৫. CD রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক আঁকি যা BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৬. A,C যোগ করি, তাহলে ABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

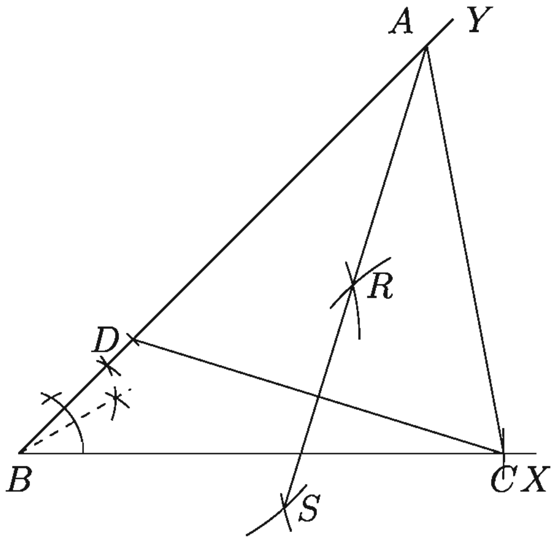


দ্রষ্টব্য: যেহেতু AL, CD এর লম্বদ্বিখণ্ডক, $AD = AC$।

তাহলে $BD = BA + AD = BA + AC = 7$ সে.মি.।

উদাহরণ ২. ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য 7.5 সে.মি. ভূমি সংলগ্ন কোণ 45° এবং অপর দুই বাহুর অন্তর 2.5 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: দেওয়া আছে ভূমি $BC = 7.5$ সে.মি, অপর দুই বাহুর অন্তর $AB - AC$ বা $AC - AB = 2.5$ সে.মি. এবং ভূমি সংলগ্ন কোণ 45°। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে। আমরা এখানে $AB - AC = 2.5$ সে.মি. এর ক্ষেত্রে অঙ্কনের ধাপসমূহ দেখবো। [$AC - AB = 2.5$ সে.মি. ধরে ত্রিভুজটি নিজে অঙ্কন কর।]



ধাপ ১. যেকোনো রেখা BX থেকে $BC = 7.5$ সে.মি. কেটে নিই।

ধাপ ২. $\angle YBC = 45^\circ$ অঙ্কন করি।

ধাপ ৩. BY রেখা থেকে $BD = 2.5$ সে.মি. কেটে নিই।

ধাপ ৪. C, D যোগ করি।

ধাপ ৫. CD এর ওপর RS লম্বদ্বিখণ্ডক আঁকি যেন BY কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৬. A ও C যোগ করি। তাহলে ABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

কাজ:

ক) একটি ত্রিভুজের পরিসীমা এবং ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ) ত্রিভুজের ভূমি $BC = 4.6$ সে.মি., $\angle B = 45^\circ$ এবং $AB + CA = 8.2$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

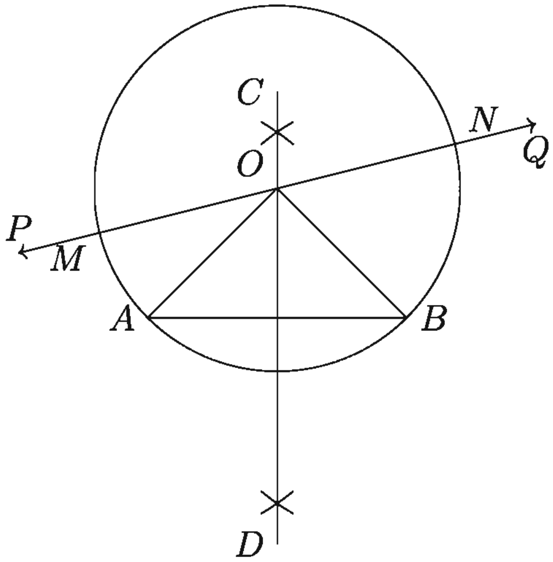
গ) সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি. এবং 4 সে.মি. দেওয়া আছে। অতিভুজ নির্ণয় করে ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

ঘ) $\triangle ABC$ এর $BC = 4.5$ সে.মি., $\angle B = 45^\circ$ এবং $AB - AC = 2.5$ সে.মি. দেওয়া আছে। $\triangle ABC$ টি অঙ্কন করতে হবে।

ঙ) $\triangle ABC$ এর পরিসীমা 12 সে.মি., $\angle B = 60^\circ$ এবং $\angle C = 45^\circ$ দেওয়া আছে। $\triangle ABC$ টি আঁকতে হবে।

বৃত্ত সংক্রান্ত কতিপয় সম্পাদ্য

সম্পাদ্য ৫. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় অবস্থিত থাকে।



A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং PQ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র PQ সরলরেখার উপর অবস্থান করে।

অঙ্কন:

ধাপ ১. A, B যোগ করি।

ধাপ ২. AB রেখাংশের সমদ্বিখণ্ডক CD অঙ্কন করি।

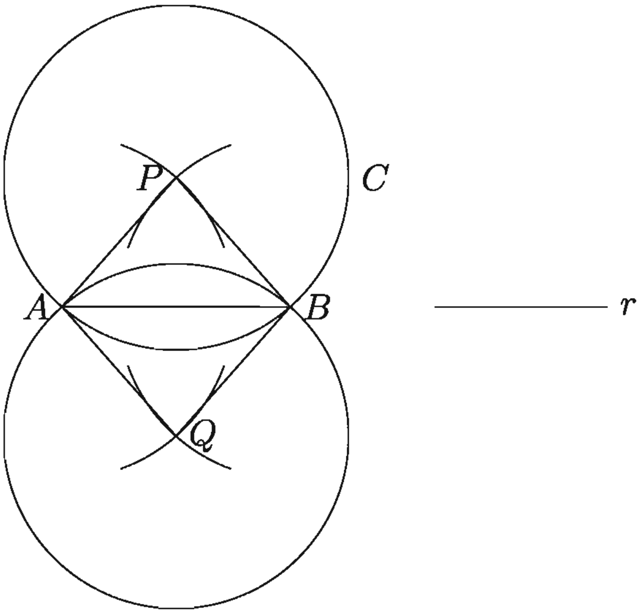
ধাপ ৩. CD রেখাংশ PQ রেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৪. O কে কেন্দ্র করে OA বা OB ব্যাসার্ধ নিয়ে $ABNM$ বৃত্ত অঙ্কন করি। যা নির্ণেয় বৃত্ত।

প্রমাণ: CD রেখা AB রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক। সুতরাং CD রেখাস্থ যেকোনো বিন্দু A ও B থেকে সমদূরবর্তী। অঙ্কনানুসারে, O বিন্দুটি CD ও PQ এর উপর অবস্থিত। আবার, OA ও OB সমান বলে O কে কেন্দ্র করে OA বা OB ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে বৃত্তটি A ও B বিন্দু দিয়ে যাবে এবং বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দুটি PQ রেখার ওপর অবস্থান করবে। $\therefore$ O কে কেন্দ্র করে OA বা OB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

সম্পাদ্য ৬. একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।

A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং r একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের দৈর্ঘ্য। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ব্যাসার্ধ r এর সমান হয়।



অঙ্কন:

ধাপ ১. A ও B যোগ করি।

ধাপ ২. A ও B কে কেন্দ্র করে r এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর উভয় পাশে দুইটি করে বৃত্তচাপ আঁকি। এক পাশের বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে P বিন্দুতে এবং অপর পাশের বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে Q বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৩. P কে কেন্দ্র করে PA ব্যাসার্ধ নিয়ে ABC বৃত্ত অঙ্কন করি।

ধাপ ৪. আবার Q কে কেন্দ্র করে QA ব্যাসার্ধ নিয়ে ABD বৃত্ত অঙ্কন করি।

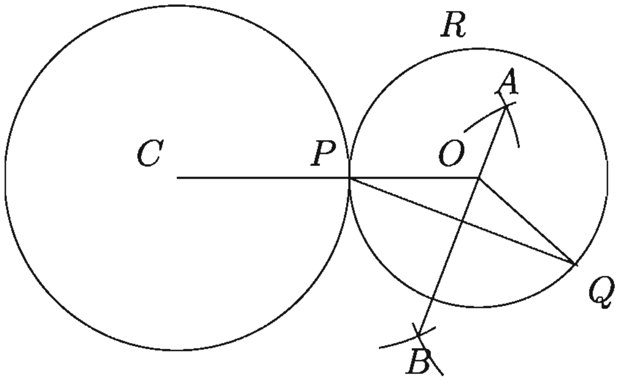
ধাপ ৫. তাহলে ABC ও ABD বৃত্ত দুইটির প্রত্যেকটিই নির্ণেয় বৃত্ত।

প্রমাণ: $PA = PB = r$। $\therefore P$ কে কেন্দ্র করে PA বা PB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত ABC বৃত্ত A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং ব্যাসার্ধ $PA = r$ হয়।

আবার $QA = QB = r$। $\therefore Q$ কে কেন্দ্র করে QA বা QB ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত ABD বৃত্ত A ও B বিন্দু দিয়ে যায় এবং ব্যাসার্ধ $QA = r$ হয়।

$\therefore ABC$ ও ABD বৃত্ত দুইটির প্রতিটিই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

সম্পাদ্য ৭. এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।



মনে করি, নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র C, P ঐ বৃত্তের উপর অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং Q ঐ বৃত্তের বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা ঐ বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং Q বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কন:

ধাপ ১. P, Q যোগ করি।

ধাপ ২. PQ এর লম্বদ্বিখণ্ডক AB আঁকি।

ধাপ ৩. C, P যোগ করি।

ধাপ ৪. বর্ধিত CP রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৫. O কে কেন্দ্র করে OP এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত PQR বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ: O, Q যোগ করি। AB রেখাংশ বা OB রেখাংশ PQ এর লম্বদ্বিখণ্ডক। $\therefore OP = OQ$।

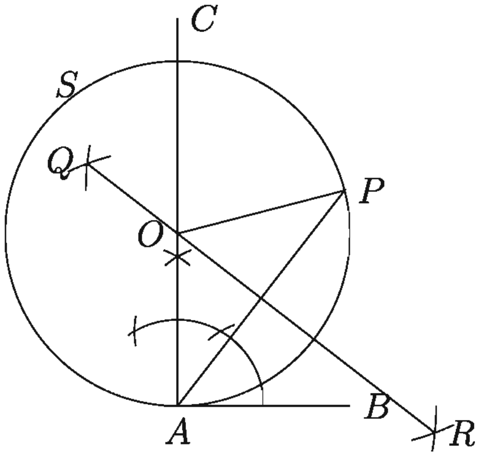
সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OP ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে তা Q বিন্দু দিয়ে যাবে।

আবার P বিন্দুটি দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখার ওপর অবস্থিত এবং P বিন্দু উভয় বৃত্তের উপর অবস্থিত। অর্থাৎ P বিন্দুতে বৃত্তদ্বয় মিলিত হয়েছে। সুতরাং বৃত্তদ্বয় P বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OP ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

সম্পাদ্য ৮. এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং রেখার বহিঃস্থ কোনো বিন্দু দিয়ে যায়।

মনে করি, AB সরলরেখাস্থ A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB রেখার বহিঃস্থ P অপর একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। এরূপ একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা AB কে A বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং P বিন্দু দিয়ে যায়।



অঙ্কন:

ধাপ ১. AB এর উপর A বিন্দুতে AC লম্ব অঙ্কন করি।

ধাপ ২. P, A যোগ করে তার লম্বদ্বিখণ্ডক QR অঙ্কন করি।

ধাপ ৩. QR এবং AC রেখাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৪. O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে APS বৃত্ত অঙ্কন করি। তাহলে APS ই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ: O, P যোগ করি। AP রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক QR এর উপর O অবস্থিত।

$\therefore OA = OP$।

$\therefore O$ কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত P বিন্দু দিয়ে যায়।

আবার OA ব্যাসার্ধ রেখার A প্রান্ত বিন্দুতে AB এর ওপর AO লম্ব।

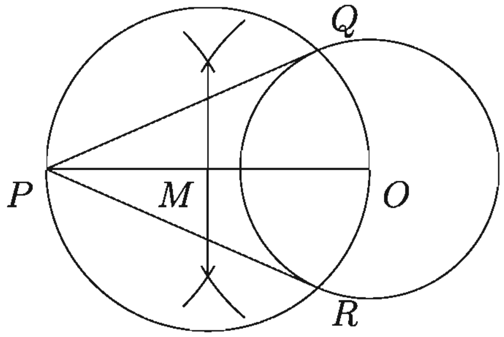
$\therefore AB$ রেখাংশ বৃত্তটিকে A বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$\therefore O$ কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটিই নির্ণেয় বৃত্ত।

বিশ্লেষণ: যেহেতু বৃত্তটি নির্দিষ্ট রেখাকে নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, সুতরাং নির্দিষ্ট রেখার নির্দিষ্ট বিন্দুতে লম্ব আঁকতে হবে এবং এই লম্বই বৃত্তের একটি ব্যাস হবে। আবার ঐ রেখাস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু ও বহিঃস্থ নির্দিষ্ট বিন্দু উভয়েই বৃত্তের পরিধির ওপরে থাকবে বিধায় এই বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক কেন্দ্র দিয়ে যাবে। তাহলে এই লম্বদ্বিখণ্ডক ও পূর্বাঙ্কিত ব্যাসের ছেদবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হবে।

উদাহরণ ৩. 2 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র থেকে 5 সে.মি. দূরে কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু হতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: 2 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O এবং নির্দিষ্ট P থেকে O বিন্দুর দূরত্ব 5 সে.মি.। P বিন্দু থেকে উক্ত বৃত্তে স্পর্শক অঙ্কন করে তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।



ধাপ ১. OP রেখাকে দ্বিখণ্ডিত করি। ধরি, দ্বিখণ্ডন বিন্দু M।

ধাপ ২. M কে কেন্দ্র করে OM ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি যা O কেন্দ্রিক বৃত্তের Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ ৩. P, Q এবং P, R যোগ করি। তাহলে PQ এবং PR-ই নির্ণেয় স্পর্শক।

এখন, PQ ও PR কে পরিমাপ করে পাই, $PQ = PR = 4.6$ সে.মি.

কাজ:

ক) 5 সে.মি., 12 সে.মি. ও 13 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করে এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

খ) 6.5 সে.মি., 7 সে.মি. এবং 7.5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত অঙ্কন করে এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

অনুশীলনী 8

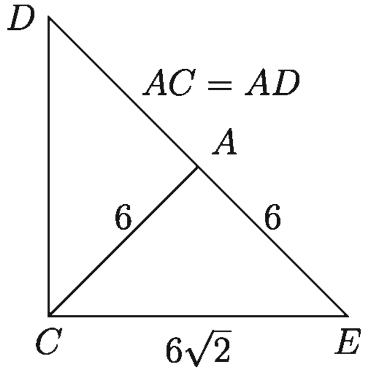
১. $\angle x = 60^\circ$ হলে $\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের মান কত ?

ক) 30° খ) 60° গ) 120° ঘ) 180°

২. 3.5 সে.মি., 4.5 সে.মি. এবং 5.5 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিস্পর্শ করলে কেন্দ্রত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের পরিসীমা কত সে.মি.?

ক) 54 খ) 40.5 গ) 27 ঘ) 13

নিচের চিত্রের আলোকে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।



৩. $\angle ADC$ এর মান কত?

ক) 30° খ) 45° গ) 60° ঘ) 75°

৪. $\triangle ADC$ ও $\triangle AEC$ এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত কত?

ক) $2:1$ খ) $1:1$ গ) $1:2$ ঘ) $1:\sqrt{2}$

৫. ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৬. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৭. ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৮. ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৯. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

১০. ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

১১. ক) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

খ) একটি ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় দেয়া আছে ত্রিভুজটি আঁক।

১২. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

১৩. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১৪. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোনো বিন্দুতে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১৫. ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ তিনটি বৃত্ত আঁক যেন তারা পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে।

১৬. O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB জ্যা এর P যেকোনো বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে অপর একটি জ্যা CD অঙ্কন করতে হবে যেন $CP^2 = AP \cdot PB$ হয়।

১৭. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 5 সে.মি. এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি.।

ক) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ) ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করে ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

গ) এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা পূর্বে অঙ্কিত পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান একটি বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু Q দিয়ে যায়।

১৮. O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি. এবং O হতে 5 সে.মি. দূরে T বিন্দু অবস্থিত।

ক) তথ্যানুসারে চিত্র আঁক।

খ) T হতে বৃত্তে দুটি স্পর্শক আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

গ) পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করে স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি নির্ণয় কর।

অধ্যায় ৫

সমীকরণ (Equation)

বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যা বর্ণনায় সমীকরণের উদ্ভব ঘটে। যেমন আমি প্রতিটি 200 টাকা মূল্যের কয়েকটি শার্ট ও 400 টাকা মূল্যের কয়েকটি প্যান্ট কিনি। এতে আমার 1500 টাকা খরচ হয়। এই তথ্যকে আমরা $200s + 400p = 1500$ বা, $2s + 4p = 15$ আকারে বর্ণনা করতে পারি, যেখানে s শার্টের সংখ্যা ও p প্যান্টের সংখ্যা। $2s + 4p = 15$ একটি সমীকরণ যেখানে s ও p অজ্ঞাত রাশি। চলক হিসেবে s ও p এর নির্দিষ্ট ডোমেন রয়েছে, যা থেকে অজ্ঞাত রাশির নির্দিষ্ট মান নির্ণয় করাই সমীকরণের লক্ষ্য। এরূপ সমাধান সম্পর্কে নবম-দশম শ্রেণির গণিত বইয়ে আলোচনা করা হয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা -

- দ্বিঘাত সমীকরণ $(ax^2 + bx + c = 0)$ সমাধান করতে পারবে।
- বর্গমূলবিশিষ্ট সমীকরণ চিহ্নিত করতে পারবে।
- বর্গমূলবিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান করতে পারবে।
- সূচকীয় সমীকরণ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সূচকীয় সমীকরণ সমাধান করতে পারবে।
- দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণের জোট সমাধান করতে পারবে।
- বাস্তবভিত্তিক সমস্যাকে দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণে প্রকাশ করে সমাধান করতে পারবে।
- দুই চলক বিশিষ্ট সূচকীয় সমীকরণ জোট সমাধান করতে পারবে।
- লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণ $(ax^2 + bx + c = 0)$ সমাধান করতে পারবে।

এক চলক সম্পর্কিত দ্বিঘাত সমীকরণ ও তার সমাধান

আমরা জানি, চলকের যে মান বা মানগুলোর জন্য সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয়, ঐ মান বা মানগুলোই সমীকরণের মূল (Root) এবং ঐ মান বা মানগুলোর দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

নবম-দশম শ্রেণির গণিত বইয়ে এক চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণ এবং দুই চলকের একঘাত ও দ্বিঘাত সমীকরণ সম্পর্কে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে। সমীকরণের মূলগুলো মূলদ সংখ্যা হলে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বামপক্ষকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সহজেই তার সমাধান করা যায়।

কিন্তু যেকোনো রাশিমালাকে সহজে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় না। সে জন্য যেকোনো প্রকার দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানের জন্য নিম্নলিখিত পদ্ধতিটি ব্যবহার করা হয়।

এক চলক সংবলিত দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2+bx+c=0$। এখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a\neq 0$। আমরা দ্বিঘাত সমীকরণটির সমাধান করি,

$ax^2+bx+c=0$

বা, $a^2x^2+abx+ac=0$ [উভয়পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

বা, $(ax)^2+2(ax)\dfrac{b}{2}+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b}{2}\right)^2+ac=0$

বা, $\left(ax+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{b^2}{4}-ac$

বা, $\left(ax+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4}$

বা, $ax+\dfrac{b}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}$ [উভয় পক্ষের বর্গমূল করে]

বা, $ax=-\dfrac{b}{2}\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2}$

বা, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdots\cdots(1)$

অতএব, x এর দুইটি মান পাওয়া গেল এবং মান দুইটি হচ্ছে

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdots\cdots(2)$ এবং $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdots\cdots(3)$

উপরের (1) নং সমীকরণে b^2-4ac কে দ্বিঘাত সমীকরণটির নিশ্চায়ক বলে কারণ ইহা সমীকরণটির মূলদ্বয়ের ধরণ ও প্রকৃতি নির্ণয় করে।

নিশ্চায়কের অবস্থাভেদে দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের ধরন ও প্রকৃতি

ধরি a, b, c মূলদ সংখ্যা। তাহলে

ক) $b^2-4ac>0$ এবং পূর্ণবর্গ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ হবে।

খ) $b^2-4ac>0$ কিন্তু পূর্ণবর্গ না হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ হবে।

গ) $b^2-4ac=0$ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব ও পরস্পর সমান হবে, এক্ষেত্রে $x=-\dfrac{b}{2a}$

ঘ) $b^2-4ac<0$ অর্থাৎ ঋণাত্মক হলে সমীকরণটির বাস্তব মূল নাই।

উদাহরণ ১. $x^2-5x+6=0$ এর সমাধান কর।

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে এক্ষেত্রে পাওয়া যায় $a = 1$, $b = -5$ এবং $c = 6$। অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

বা, $x = \frac{5+1}{2}, \frac{5-1}{2}$

অর্থাৎ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$

উদাহরণ ২. $x^2 - 6x + 9 = 0$ এর সমাধান কর।

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে এক্ষেত্রে পাওয়া যায় $a = 1$, $b = -6$ এবং $c = 9$। অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2}$$

অর্থাৎ $x_1 = 3$, $x_2 = 3$

উদাহরণ ৩. $x^2 - 2x - 2 = 0$ এর সমাধান কর।

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে এক্ষেত্রে পাওয়া যায় $a = 1$, $b = -2$ এবং $c = -2$। অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2}$$

বা, $x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{3})}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$

অর্থাৎ $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$।

এখানে লক্ষণীয় যে, সাধারণ নিয়মে মূলদ সংখ্যার সাহায্যে $x^2 - 2x - 2$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা না গেলেও প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান করা সম্ভব হয়েছে।

উদাহরণ ৪. $3 - 4x - x^2 = 0$ এর সমাধান কর।

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে এক্ষেত্রে পাওয়া যায় $a = -1$, $b = -4$, $c = 3$। অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 12}}{-2} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{-2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{-2}$$

বা, $x = -(2 \pm \sqrt{7})$

অর্থাৎ, $x_1 = -2 - \sqrt{7}$, $-2 + \sqrt{7}$।

কাজ: উপরের (2) ও (3) নং সূত্রের সাহায্যে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণ হতে মূল x_1 এবং x_2 এর মান নির্ণয় কর যখন

ক) $b = 0$
খ) $c = 0$
গ) $b = c = 0$
ঘ) $a = 1$
ঙ) $a = 1, b = c = 2p$

অনুশীলনী ৫.১

সূত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান কর:

১. $2x^2 + 9x + 9 = 0$
২. $3 - 4x - 2x^2 = 0$
৩. $4x - 1 - x^2 = 0$
৪. $2x^2 - 5x - 1 = 0$
৫. $3x^2 + 7x + 1 = 0$
৬. $2 - 3x^2 + 9x = 0$
৭. $x^2 - 8x + 16 = 0$
৮. $2x^2 + 7x - 1 = 0$
৯. $7x - 2 - 3x^2 = 0$

মূল চিহ্ন সংবলিত সমীকরণ

সমীকরণে চলকের বর্গমূল সংবলিত রাশি থাকলে তাকে বর্গ করে বর্গমূল চিহ্নমুক্ত নতুন সমীকরণ পাওয়া যায়। উক্ত সমীকরণ সমাধান করে যে মূলগুলো পাওয়া যায় অনেক সময় সবগুলো মূল প্রদত্ত সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না। এ ধরনের মূল অবান্তর (Extraneous) মূল। সুতরাং মূলচিহ্ন সংবলিত সমীকরণ সমাধান প্রক্রিয়ায় প্রাপ্ত মূলগুলো প্রদত্ত সমীকরণের মূল কিনা তা অবশ্যই পরীক্ষা করে দেখা দরকার। পরীক্ষার পর যে সব মূল উক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে তাই হবে প্রদত্ত সমীকরণের মূল। নিচে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হলো।

উদাহরণ ৫. সমাধান কর: $\sqrt{8x+9} - \sqrt{2x+15} = \sqrt{2x-6}$

সমাধান: $\sqrt{8x+9} - \sqrt{2x+15} = \sqrt{2x-6}$

বা, $\sqrt{2x+15} + \sqrt{2x-6} = \sqrt{8x+9}$

বা, $2x + 15 + 2x - 6 + 2\sqrt{2x+15}\sqrt{2x-6} = 8x + 9$ [বর্গ করে]

বা, $\sqrt{2x+15}\sqrt{2x-6} = 2x$

বা, $(2x+15)(2x-6) = 4x^2$ [পুনরায় বর্গ করে]

বা, $4x^2 + 18x - 90 = 4x^2$

বা, $18x = 90$

$\therefore x = 5$

শুদ্ধি পরীক্ষা: $x = 5$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{49} - \sqrt{25} = 7 - 5 = 2$ এবং ডানপক্ষ $= \sqrt{4} = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 5$

কাজ: $p = \sqrt{\dfrac{x}{x+16}}$ ধরে $\sqrt{\dfrac{x}{x+16}} + \sqrt{\dfrac{x+16}{x}} = \dfrac{25}{12}$ সমীকরণটির সমাধান করে শুদ্ধি পরীক্ষা কর।

উদাহরণ ৬. সমাধান কর: $\sqrt{2x+8} - 2\sqrt{x+5} + 2 = 0$

সমাধান: $\sqrt{2x+8} = 2\sqrt{x+5} - 2$

বা, $2x + 8 = 4(x+5) + 4 - 8\sqrt{x+5}$ [বর্গ করে]

বা, $8\sqrt{x+5} = 4x + 20 + 4 - 2x - 8$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $8\sqrt{x+5} = 2x + 16 = 2(x+8)$

বা, $4\sqrt{x+5} = x + 8$

বা, $16(x+5) = x^2 + 16x + 64$ [বর্গ করে]

বা, $16x + 80 = x^2 + 16x + 64$

বা, $16 = x^2$

$\therefore x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

শুদ্ধি পরীক্ষা: $x = 4$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{16} - 2\sqrt{9} + 2 = 4 - 2 \times 3 + 2 = 0 =$ ডানপক্ষ

$x = -4$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{-8+8} - 2\sqrt{-4+5} + 2 = 0 - 2 \times 1 + 2 = 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 4, -4$

উদাহরণ ৭. সমাধান কর: $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}$

সমাধান: $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}$

বা, $2x + 9 + x - 4 - 2\sqrt{2x+9}\sqrt{x-4} = x + 1$ [বর্গ করে]

বা, $2x + 4 - 2\sqrt{2x+9}\sqrt{x-4} = 0$

বা, $\sqrt{2x+9}\sqrt{x-4} = x + 2$

বা, $(2x+9)(x-4) = x^2 + 4x + 4$ [বর্গ করে]

বা, $2x^2 + x - 36 = x^2 + 4x + 4$

বা, $x^2 - 3x - 40 = 0$

বা, $(x-8)(x+5) = 0$

$\therefore x = 8$ অথবা $x = -5$

শুদ্ধি পরীক্ষা: $x = 8$ হলে, বামপক্ষ = $5 - 2 = 3$ এবং ডানপক্ষ = 3

অতএব, $x = 8$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।

$x = -5$ গ্রহণযোগ্য নয়, কেননা সমীকরণে $x = -5$ বসালে ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল আসে যা সংজ্ঞায়িত নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 8$

মন্তব্য: এমনকি জটিল সংখ্যায় সমাধান বের করলেও $x = -5$ গ্রহণযোগ্য হয় না।

উদাহরণ ৮. সমাধান কর: $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}$

সমাধান: $\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-3)(x-4)} = \sqrt{2}$

বা, $\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{2} = -\sqrt{x^2 - 7x + 12}$

বা, $x^2 - 3x + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2 = x^2 - 7x + 12$ [বর্গ করে]

বা, $\sqrt{2x^2 - 6x + 4} = 2x - 4$

বা, $2x^2 - 6x + 4 = (2x - 4)^2 = 4x^2 - 16x + 16$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 - 5x + 6 = 0$

বা, $(x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x = 2$ অথবা $x = 3$।

শুদ্ধি পরীক্ষা: $x = 2$ হলে, বামপক্ষ = $\sqrt{2}$ = ডানপক্ষ

$x = 3$ হলে, বামপক্ষ = $\sqrt{2}$ = ডানপক্ষ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 2,\ 3$।

উদাহরণ ৯. সমাধান কর: $\sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

সমাধান: $\sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

এখন $x^2 - 6x + 13 = y$ ধরলে প্রদত্ত সমীকরণ হবে

$\sqrt{y+2} - \sqrt{y} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

বা, $\sqrt{y+2} + \sqrt{8} = \sqrt{y} + \sqrt{10}$

বা, $y + 2 + 8 + 2\sqrt{8y + 16} = y + 10 + 2\sqrt{10y}$ [বর্গ করে]

বা, $\sqrt{8y + 16} = \sqrt{10y}$

বা, $8y + 16 = 10y$ [বর্গ করে]

বা, $2y = 16$ বা, $y = 8$

বা, $x^2 - 6x + 13 = 8$ [y এর মান বসিয়ে]

বা, $x^2 - 6x + 5 = 0$ বা, $(x-1)(x-5) = 0$

$\therefore x = 1$ অথবা 5।

শুদ্ধি পরীক্ষা: $x = 1$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{10} - \sqrt{8} =$ ডানপক্ষ

$x = 5$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{10} - \sqrt{8} =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 1, 5$

উদাহরণ ১০. সমাধান কর: $(1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

সমাধান: $(1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}}$

বা, $1 + x + 1 - x + 3 \cdot (1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}}\{(1+x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{1}{3}}\} = 2$ [ঘন করে]

বা, $2 + 3 \cdot (1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2$

বা, $3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot (1+x)^{\frac{1}{3}} \cdot (1-x)^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $(1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} = 0$

বা, $(1+x)(1-x) = 0$ [আবার ঘন করে]

$x = 1$ এবং $x = -1$ উভয়ই সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \pm 1$

অনুশীলনী ৫.২

সমাধান কর:

১. $\sqrt{x-4} + 2 = \sqrt{x+12}$

২. $\sqrt{11x-6} = \sqrt{4x+5} - \sqrt{x-1}$

৩. $\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$

৪. $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9}$

৫. $\sqrt{11x-6} = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1}$

৬. $\sqrt{x^2-8} + \sqrt{x^2-14} = 6$

৭. $\sqrt{x^2-6x+9} - \sqrt{x^2-6x+6} = 1$

৮. $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-9} = 1$

৯. $6\sqrt{\dfrac{2x}{x-1}} + 5\sqrt{\dfrac{x-1}{2x}} = 13$

১০. $\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+2}} + 2\sqrt{\dfrac{3x+2}{x-1}} = 3$

সূচক সমীকরণ (Indicial Equation)

যে সমীকরণে অজ্ঞাত চলক সূচকরূপে থাকে, তাকে সূচক সমীকরণ বলে। $2^x = 8$, $16^x = 4^{x+2}$, $2^{x+1} - 2^x - 8 = 0$ সমীকরণগুলো সূচক সমীকরণ যেখানে x অজ্ঞাত চলক। সূচক সমীকরণ সমাধান

করতে সূচকের নিম্নলিখিত ধর্মটি প্রায়ই ব্যবহার করা হয়:

$a > 0$, $a \neq 1$ হলে $a^x = a^m$ হবে যদি ও কেবল যদি $x = m$ হয়। এ জন্য প্রথমে সমীকরণের উভয় পক্ষকে একই সংখ্যার ঘাত রূপে প্রকাশ করা হয়।

কাজ:

ক) 4096 কে $\frac{1}{2}$, 2, 4, 8, 16, $2\sqrt{2}$ এবং $\sqrt[3]{4}$ এর সূচকে প্রকাশ কর।

খ) 729 কে 3, 9, 27, 16 এবং $\sqrt[5]{9}$ এর সূচকে লিখ।

গ) $\frac{64}{729}$ কে $\frac{3}{2}$ এবং $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ এর সূচকে প্রকাশ কর।

উদাহরণ ১১. সমাধান কর: $2^{x+7} = 4^{x+2}$

সমাধান: $2^{x+7} = 4^{x+2}$

বা, $2^{x+7} = (2^2)^{x+2}$

বা, $2^{x+7} = 2^{2x+4}$

বা, $x + 7 = 2x + 4$

বা, $x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 3$

উদাহরণ ১২. সমাধান কর: $3 \cdot 27^x = 9^{x+4}$

সমাধান: $3 \cdot 27^x = 9^{x+4}$

বা, $3 \cdot (3^3)^x = (3^2)^{x+4}$

বা, $3 \cdot 3^{3x} = 3^{2(x+4)}$

বা, $3^{3x+1} = 3^{2x+8}$

বা, $3x + 1 = 2x + 8$

বা, $x = 7$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 7$

উদাহরণ ১৩. সমাধান কর: $3^{mx-1} = 3a^{mx-2}$ $(a > 0, a \neq 3, m \neq 0)$

সমাধান: $3^{mx-1} = 3a^{mx-2}$

বা, $\frac{3^{mx-1}}{3} = a^{mx-2}$ [উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $3^{mx-2} = a^{mx-2}$

বা, $\left(\frac{a}{3}\right)^{mx-2} = 1 = \left(\frac{a}{3}\right)^0$

বা, $mx - 2 = 0$

বা, $mx = 2$

বা, $x = \frac{2}{m}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \frac{2}{m}$

উদাহরণ ১৪. সমাধান কর: $2^{3x-5} \cdot a^{x-2} = 2^{x-3} \cdot 2a^{1-x}$ $(a > 0$ এবং $a \neq \frac{1}{2})$

সমাধান: $2^{3x-5} \cdot a^{x-2} = 2^{x-3} \cdot 2a^{1-x}$

বা, $\frac{a^{x-2}}{a^{1-x}} = \frac{2^{x-3} \cdot 2^1}{2^{3x-5}}$ বা, $a^{x-2-1+x} = 2^{x-3+1-3x+5}$

বা, $a^{2x-3} = 2^{-2x+3}$ বা, $a^{2x-3} = 2^{-(2x-3)}$

বা, $a^{2x-3} = \frac{1}{2^{2x-3}}$ বা, $a^{2x-3} \cdot 2^{2x-3} = 1$

বা, $(2a)^{2x-3} = 1 = (2a)^0$

বা, $2x - 3 = 0$ বা, $2x = 3$ বা, $x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \frac{3}{2}$

উদাহরণ ১৫. সমাধান কর: $a^{-x}(a^x + b^{-x}) = \frac{a^2b^2 + 1}{a^2b^2}$ $(a > 0, b > 0, ab \neq 1)$

সমাধান: $a^{-x}(a^x + b^{-x}) = 1 + \frac{1}{a^2b^2}$

বা, $a^{-x} \cdot a^x + a^{-x} \cdot b^{-x} = 1 + \frac{1}{a^2b^2}$

বা, $1 + (ab)^{-x} = 1 + (ab)^{-2}$

বা, $(ab)^{-x} = (ab)^{-2}$

বা, $-x = -2$

বা, $x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 2$

উদাহরণ ১৬. সমাধান কর: $3^{x+5} = 3^{x+3} + \frac{8}{3}$

সমাধান: $3^{x+5} = 3^{x+3} + \frac{8}{3}$

বা, $3^x \cdot 3^5 = 3^x \cdot 3^3 + \frac{8}{3}$

বা, $3^x \cdot 3^6 - 3^x \cdot 3^4 = 8$ [পক্ষান্তর করে এবং উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা গুণ করে]

বা, $3^x \cdot 3^4(3^2 - 1) = 8$

বা, $3^{x+4} \cdot 8 = 8$

বা, $3^{x+4} = 1 = 3^0$

বা, $x + 4 = 0$ বা, $x = -4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = -4$

উদাহরণ ১৭. সমাধান কর: $3^{2x-2} - 5 \cdot 3^{x-2} - 66 = 0$

সমাধান: $3^{2x-2} - 5 \cdot 3^{x-2} - 66 = 0$

বা, $\frac{3^{2x}}{9} - \frac{5}{9} \cdot 3^x - 66 = 0$

বা, $3^{2x} - 5 \cdot 3^x - 594 = 0$ [উভয় পক্ষকে 9 দ্বারা গুণ করে]

বা, $a^2 - 5a - 594 = 0$ [$3^x = a$ ধরে]

বা, $a^2 - 27a + 22a - 594 = 0$

বা, $(a - 27)(a + 22) = 0$

এখন $a \neq -22$ কেননা $a = 3^x > 0$ সুতরাং $a + 22 \neq 0$

অতএব, $a - 27 = 0$

বা, $3^x = 27 = 3^3$

বা, $x = 3$

নির্ণেয় সমাধান: $x = 3$

উদাহরণ ১৮. সমাধান কর: $a^{2x} - (a^3 + a)a^{x-1} + a^2 = 0 \ (a > 0, a \neq 1)$

সমাধান: $a^{2x} - (a^3 + a)a^{x-1} + a^2 = 0$

বা, $a^{2x} - a(a^2 + 1)a^x \cdot a^{-1} + a^2 = 0$

বা, $a^{2x} - (a^2 + 1)a^x + a^2 = 0$

বা, $p^2 - (a^2 + 1)p + a^2 = 0$ [$a^x = p$ ধরে]

বা, $p^2 - a^2p - p + a^2 = 0$

বা, $(p-1)(p-a^2)=0$

বা, $p=1$ অথবা $p=a^2$

বা, $a^x=1=a^0$ অথবা $a^x=a^2$

বা, $x=0$ অথবা $x=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x=0,2$

অনুশীলনী ৫.৩

সমাধান কর:

১. $3^{x+2}=81$

২. $5^{3x-7}=3^{3x-7}$

৩. $2^{x-4}=4a^{x-6}$ $(a>0, a\neq 2)$

৪. $(\sqrt{3})^{x+5}=(\sqrt[3]{3})^{2x+5}$

৫. $(\sqrt[5]{4})^{4x+7}=(\sqrt[11]{64})^{2x+7}$

৬. $\dfrac{3^{3x-4}\cdot a^{2x-5}}{3^{x+1}}=a^{2x-5}$ $(a>0)$

৭. $\dfrac{5^{2x}\cdot b^{x-3}}{5^{x+3}}=a^{x-3}(a,b>0, 5b\neq a)$

৮. $4^{x+2}=2^{2x+1}+14$

৯. $5^x+5^{2-x}=26$

১০. $3(9^x-4\cdot 3^{x-1})+1=0$

১১. $4^{1+x}+4^{1-x}=10$

১২. $2^{2x}-3\cdot 2^{x+2}=-32$

দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট

দুই চলকবিশিষ্ট দুইটি একঘাত সমীকরণ অথবা একটি একঘাত ও একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমন্বয়ে গঠিত জোটের সমাধান নির্ণয় পদ্ধতি নবম-দশম শ্রেণির গণিত বইয়ে আলোচনা করা হয়েছে। এখানে এরূপ দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমন্বয়ে গঠিত কতিপয় জোটের সমাধান নির্ণয় আলোচনা করা হলো।

উল্লেখ্য যে, চলক দুইটি x ও y হলে (x, y) = (a, b) এরূপ আকারে জোটের একটি সমাধান যদি সমীকরণ দুইটিতে x এর স্থলে a এবং y এর স্থলে b বসালে তাদের উভয় পক্ষ সমান হয়।

উদাহরণ ১৯. সমাধান কর: $x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2},\ y+\dfrac{1}{x}=3$

সমাধান: $x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}\cdots(1)$

$y+\dfrac{1}{x}=3\cdots(2)$

(1) থেকে $xy+1=\frac{3}{2}y \cdots (3)$

(2) থেকে, $xy+1=3x \cdots (4)$

(3) ও (4) থেকে $\frac{3}{2}y=3x$ বা, $y=2x \cdots (5)$

(5) থেকে y এর মান (4) এ বসিয়ে পাই,

$2x^2+1=3x$ বা, $2x^2-3x+1=0$

বা, $(x-1)(2x-1)=0 \therefore x=1$ অথবা $\frac{1}{2}$

(5) থেকে যখন $x=1$, তখন $y=2$ এবং যখন $x=\frac{1}{2}$ তখন $y=1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(1,2), \left(\frac{1}{2},1\right)$

উদাহরণ ২০. সমাধান কর: $x^2=3x+6y,\ xy=5x+4y$

সমাধান: $x^2=3x+6y \cdots (1)$

$xy=5x+4y \cdots (2)$

(1) থেকে (2) বিয়োগ করে, $x(x-y)=-2(x-y)$

বা, $x(x-y)+2(x-y)=0$

বা, $(x-y)(x+2)=0$

$\therefore x=y \cdots (3)$

বা, $x=-2 \cdots (4)$

(3) ও (1) থেকে আমরা পাই, $y^2=9y$ বা, $y(y-9)=0 \therefore y=0$ অথবা 9

(3) থেকে, যখন $y=0$ তখন $x=0$ এবং যখন $y=9$, তখন $x=9$

আবার (4) ও (1) থেকে আমরা পাই, $x=-2$ এবং $4=-6+6y$ বা, $6y=10$ বা, $y=\frac{5}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(0,0),(9,9),(-2,\frac{5}{3})$

উদাহরণ ২১. সমাধান কর: $x^2+y^2=61,\ xy=-30$

সমাধান: $x^2+y^2=61 \cdots (1)$

$xy=-30 \cdots (2)$

(2) কে 2 দ্বারা গুণ করে (1) থেকে বিয়োগ করলে আমরা পাই, $(x-y)^2=121$

বা, $(x-y)=\pm 11 \cdots (3)$

(2) কে 2 দ্বারা গুণ করে (1) এর সাথে যোগ করলে পাই, $(x+y)^2=1$

বা, $x+y=\pm 1 \cdots (4)$

(3) ও (4) থেকে,

$$\left.\begin{aligned} x+y&=1\\ x-y&=11 \end{aligned}\right\}\cdots(5) \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=1\\ x-y&=-11 \end{aligned}\right\}\cdots(6)$$

$$\left.\begin{aligned} x+y&=-1\\ x-y&=11 \end{aligned}\right\}\cdots(7) \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=-1\\ x-y&=-11 \end{aligned}\right\}\cdots(8)$$

সমাধান করে পাই,

(5) থেকে, $x=6, y=-5$ (6) থেকে, $x=-5, y=6$

(7) থেকে, $x=5, y=-6$ (8) থেকে $x=-6, y=5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(6,-5),(-5,6),(5,-6),(-6,5)$

উদাহরণ ২২. সমাধান কর: $x^2-2xy+8y^2=8, 3xy-2y^2=4$

সমাধান: $x^2-2xy+8y^2=8 \cdots (1)$

$3xy-2y^2=4 \cdots (2)$

(1) এবং (2) থেকে আমরা পাই,

$$\frac{x^2-2xy+8y^2}{3xy-2y^2}=\frac{2}{1}$$

বা, $x^2-2xy+8y^2=6xy-4y^2$

বা, $x^2-8xy+12y^2=0$

বা, $x^2-6xy-2xy+12y^2=0$

বা, $(x-6y)(x-2y)=0$

$\therefore x=6y \cdots (3)$ অথবা, $x=2y \cdots (4)$

(3) থেকে x এর মান (2) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$3\cdot 6y\cdot y-2y^2=4$ বা, $16y^2=4$ বা, $y^2=\dfrac{1}{4}$ বা, $y=\pm\dfrac{1}{2}$

(3) থেকে, $x=6\times\left(\pm\dfrac{1}{2}\right)=\pm 3$

আবার (4) থেকে x এর মান (2) এ বসিয়ে আমরা পাই,

$3 \cdot 2y \cdot y - 2y^2 = 4$ বা, $4y^2 = 4$ বা, $y^2 = 1$ বা, $y = \pm 1$

(4) থেকে $x = 2 \times (\pm 1) = \pm 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = \left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$

উদাহরণ ২৩. সমাধান কর: $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2}, x^2 + y^2 = 90$

সমাধান: $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2} \cdots (1)$

$x^2 + y^2 = 90 \cdots (2)$

(1) থেকে আমরা পাই,

$$\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{5}{2}$$

বা, $\frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2} = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{2 \times 90}{x^2 - y^2} = \frac{5}{2}$ [(2) থেকে $x^2 + y^2 = 90$ বসিয়ে]

বা, $x^2 - y^2 = 72 \cdots (3)$

$(2) + (3)$ নিলে, $2x^2 = 162$ বা, $x^2 = 81$ বা, $x = \pm 9$

এবং $(2) - (3)$ নিলে, $2y^2 = 18$ বা, $y^2 = 9$ বা, $y = \pm 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (9, 3), (9, -3), (-9, 3), (-9, -3)$

কাজ: উদাহরণ ২০ এবং ২১ এর সমাধান বিকল্প পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ৫.৪

সমাধান কর :

১. $(2x+3)(y-1) = 14, \ (x-3)(y-2) = -1$

২. $(x-2)(y-1) = 3, \ (x+2)(2y-5) = 15$

৩. $x^2 = 7x + 6y, \ y^2 = 7y + 6x$

৪. $x^2 = 3x + 2y, \ y^2 = 3y + 2x$

৫. $x + \frac{4}{y} = 1, \ y + \frac{4}{x} = 25$

৬. $y + 3 = \frac{4}{x},\ x - 4 = \frac{5}{3y}$

৭. $xy - x^2 = 1,\ y^2 - xy = 2$

৮. $x^2 - xy = 14,\ y^2 + xy = 60$

৯. $x^2 + y^2 = 25,\ xy = 12$

১০. $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3},\ x^2 - y^2 = 3$

১১. $x^2 + xy + y^2 = 3,\ x^2 - xy + y^2 = 7$

১২. $2x^2 + 3xy + y^2 = 20,\ 5x^2 + 4y^2 = 41$

দ্বিঘাত সহসমীকরণের ব্যবহার

সহসমীকরণের ধারণা ব্যবহার করে দৈনন্দিন জীবনের বহু সমস্যার সমাধান করা যায়। অনেক সময় সমস্যায় দুইটি অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করতে হয়। সেক্ষেত্রে অজ্ঞাত রাশি দুইটি x এবং y বা অন্য যেকোনো দুইটি স্বতন্ত্র প্রতীক ধরতে হয়। তারপর সমস্যার শর্ত বা শর্তগুলো থেকে পরস্পর অনির্ভর, সঙ্গতিপূর্ণ সমীকরণ গঠন করে সমীকরণ জোটের সমাধান করলেই অজ্ঞাত রাশি x এবং y এর মান পাওয়া যায়।

উদাহরণ ২৪. দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 650 বর্গমিটার। ঐ দুইটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 323 বর্গমিটার হলে, বর্গক্ষেত্র দুইটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

সমাধান: মনে করি, একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য x মিটার এবং অপরটির বাহুর দৈর্ঘ্য y মিটার।

প্রশ্নমতে, $x^2 + y^2 = 650 \cdots (1)$

এবং, $xy = 323 \cdots (2)$

$\therefore (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 650 + 646 = 1296$

অর্থাৎ, $(x+y) = \pm\sqrt{1296} = \pm 36$

এবং, $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = 650 - 646 = 4$

অর্থাৎ $(x-y) = \pm 2$

যেহেতু দৈর্ঘ্য ধনাত্মক, সেহেতু $x + y$ এর মান ধনাত্মক হতে হবে।

$\therefore (x+y) = 36 \cdots (3)$ এবং $(x-y) = \pm 2 \cdots (4)$

যোগ করে, $2x = 36 \pm 2$

$\therefore x = \frac{36 \pm 2}{2} = 18 \pm 1 = 19$ বা, 17

সমীকরণ (3) থেকে পাই, $y = 36 - x = 17$ বা, 19।

$\therefore$ একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 19 মিটার এবং অপর বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 17 মিটার।

উদাহরণ ২৫. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য তার প্রস্থের দ্বিগুণ অপেক্ষা 10 মিটার কম। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 600 বর্গমিটার হলে, এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $= x$ মিটার এবং আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ $= y$ মিটার

প্রশ্নমতে, $2y = x + 10 \cdots (1)$

$xy = 600 \cdots (2)$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $y = \dfrac{10 + x}{2}$

সমীকরণ (2) এ y এর মান বসিয়ে পাই, $\dfrac{x(10 + x)}{2} = 600$

বা, $\dfrac{10x + x^2}{2} = 600$ বা, $x^2 + 10x = 1200$

বা, $x^2 + 10x - 1200 = 0$ বা, $(x + 40)(x - 30) = 0$

সুতরাং, $x + 40 = 0$ বা, $x - 30 = 0$

অর্থাৎ, $x = -40$ বা, $x = 30$

কিন্তু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না। $\therefore x = 30$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 30 মিটার।

উদাহরণ ২৬. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে অঙ্কদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল হয় 3, সংখ্যাটির সাথে 18 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্ক x এবং একক স্থানীয় অঙ্ক y

$\therefore$ সংখ্যাটি = $10x + y$

প্রথম শর্তানুসারে, $\dfrac{10x + y}{xy} = 3$ বা, $10x + y = 3xy \cdots (1)$

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $10x + y + 18 = 10y + x$ বা, $9x - 9y + 18 = 0$

বা, $x - y + 2 = 0$ বা, $y = x + 2 \cdots (2)$

সমীকরণ (1) এ $y = x + 2$ বসিয়ে পাই, $10x + x + 2 = 3 \cdot x(x + 2)$

বা, $11x + 2 = 3x^2 + 6x$

বা, $3x^2 - 5x - 2 = 0$

বা, $3x^2 - 6x + x - 2 = 0$

বা, $3x(x-2)+1(x-2)=0$

বা, $(x-2)(3x+1)=0$

সুতরাং $x-2=0$ অথবা $3x+1=0$

অর্থাৎ, $x=2$ বা, $x=-\dfrac{1}{3}$

কিন্তু সংখ্যার অঙ্ক ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হতে পারে না।

সুতরাং $x=2$ এবং $y=x+2=2+2=4$

$\therefore$ সংখ্যাটি 24

অনুশীলনী ৫.৫

১. দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 481 বর্গমিটার। ঐ দুইটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 240 বর্গমিটার হলে, বর্গক্ষেত্র দুইটির প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ কত?

২. দুইটি ধনাত্মক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 250। সংখ্যা দুইটির গুণফল 117, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

৩. একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 10 মিটার। ইহার বাহুদ্বয়ের যোগফল ও বিয়োগফলের সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বাহুদ্বয় দ্বারা অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 28 বর্গমিটার হলে, প্রথম আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৪. দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 181 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 90, সংখ্যা দুইটির বর্গের অন্তর নির্ণয় কর।

৫. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 24 বর্গমিটার। অপর একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ অপেক্ষা যথাক্রমে 4 মিটার এবং 1 মিটার বেশি এবং ক্ষেত্রফল 50 বর্গমিটার। প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৬. একটি আয়তক্ষেত্রের প্রস্থের দ্বিগুণ দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 23 মিটার বেশি। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 600 বর্গমিটার হলে, তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৭. একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অপেক্ষা 8 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 48 বর্গমিটার হলে, তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৮. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে এর অঙ্কদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 2 হয়। সংখ্যাটির সাথে 27 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

৯. একটি আয়তাকার বাগানের পরিসীমা 56 মিটার এবং কর্ণ 20 মিটার। ঐ বাগানের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

১০. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 300 বর্গমিটার এবং এর অর্ধপরিসীমা একটি কর্ণ অপেক্ষা 10 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

১১. দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহু x ও y দ্বারা আবদ্ধ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 49। বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি সর্বোচ্চ কত হতে পারে?

দুই চলকবিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোট

পূর্ববর্তী অংশে এক চলকবিশিষ্ট সূচক সমীকরণের সমাধান নির্ণয় সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। দুই চলকবিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোটের সমাধান পদ্ধতি বেশ কয়েকটি উদাহরণের মাধ্যমে তুলে ধরা হলো।

উদাহরণ ২৭. সমাধান কর: $a^{x+2}\cdot a^{2y+1}=a^{10},\ a^{2x}\cdot a^{y+1}=a^{9}\ (a\neq 1)$

সমাধান: $a^{x+2}\cdot a^{2y+1}=a^{10}\ \cdots(1)\qquad a^{2x}\cdot a^{y+1}=a^{9}\ \cdots(2)$

(1) থেকে $a^{x+2y+3}=a^{10}$ বা, $x+2y+3=10$ বা, $x+2y-7=0\ \cdots(3)$

(2) থেকে, $a^{2x+y+1}=a^{9}$ বা, $2x+y+1=9$ বা, $2x+y-8=0\ \cdots(4)$

(3) ও (4) থেকে আড়গুণন পদ্ধতি অনুসারে,

$$\frac{x}{-16+7}=\frac{y}{-14+8}=\frac{1}{1-4}$$

বা, $\dfrac{x}{-9}=\dfrac{y}{-6}=\dfrac{1}{-3}$

বা, $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2}=1$

বা, $x=3,\ y=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(3,2)$

উদাহরণ ২৮. সমাধান কর: $3^{3y-1}=9^{x+y},\ 4^{x+3y}=16^{2x+3}$

সমাধান: $3^{3y-1}=9^{x+y}\ \cdots(1)$

বা, $3^{3y-1}=(3^2)^{x+y}$ বা, $3^{3y-1}=3^{2x+2y}$

বা, $3y-1=2x+2y$

বা, $2x-y+1=0\ \cdots(2)$

এবং $4^{x+3y}=16^{2x+3}\ \cdots(3)$

বা, $4^{x+3y}=(4^2)^{2x+3}$ বা, $4^{x+3y}=4^{4x+6}$

বা, $x+3y=4x+6$ বা, $3x-3y+6=0$

বা, $x-y+2=0 \cdots (4)$

(2) ও (4) থেকে আড়গুণন পদ্ধতি অনুসারে, $\dfrac{x}{-2+1}=\dfrac{y}{1-4}=\dfrac{1}{-2+1}$

বা, $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{-3}=-1$

বা, $x=1,\ y=3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(1,3)$

উদাহরণ ২৯. সমাধান কর: $x^y=y^x,\ x=2y$

সমাধান: $x^y=y^x \cdots (1)$ $\quad x=2y \cdots (2)$ এখানে $x\neq 0, y\neq 0$

(2) থেকে x এর মান (1) এ বসিয়ে পাই, $(2y)^y=y^{2y}$ বা, $2^y\cdot y^y=y^{2y}$

বা, $\dfrac{y^{2y}}{y^y}=2^y$ বা, $y^y=2^y$ $\therefore y=2$

(2) থেকে, $x=4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(4,2)$

উদাহরণ ৩০. সমাধান কর: $x^y=y^2,\ y^{2y}=x^4$, যেখানে $x\neq 1$

সমাধান: $x^y=y^2 \cdots (1)$ $\quad y^{2y}=x^4 \cdots (2)$

(1) থেকে পাই, $(x^y)^y=(y^2)^y$ বা, $x^{y^2}=y^{2y} \cdots (3)$

(3) ও (2) থেকে পাই, $x^{y^2}=x^4$

$\therefore y^2=4$ বা, $y=\pm 2$

এখন $y=2$ হলে (1) থেকে পাই, $x^2=2^2=4$ বা, $x=\pm 2$

আবার, $y=-2$ হলে (1) থেকে পাই, $x^{-2}=(-2)^2=4$ বা, $x^2=\dfrac{1}{4}$ বা, $x=\pm\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(2,2),\ (-2,2),\ \left(\dfrac{1}{2},-2\right),\ \left(-\dfrac{1}{2},-2\right)$

উদাহরণ ৩১. সমাধান কর: $8\cdot 2^{xy}=4^y,\ 9^x\cdot 3^{xy}=\dfrac{1}{27}$

সমাধান: $8\cdot 2^{xy}=4^y \cdots (1)$ $\quad 9^x\cdot 3^{xy}=\dfrac{1}{27} \cdots (2)$

(1) থেকে পাই, $2^3\cdot 2^{xy}=(2^2)^y$ বা, $2^{3+xy}=2^{2y}$ বা, $3+xy=2y \cdots (3)$

(2) থেকে পাই, $(3^2)^x\cdot 3^{xy}=\dfrac{1}{3^3}$ বা, $3^{2x+xy}=3^{-3}$ বা, $2x+xy=-3 \cdots (4)$

(3) থেকে (4) বিয়োগ করে পাই, $3-2x=2y+3$ বা, $-x=y \cdots (5)$

(5) থেকে y এর মান (3) এ বসিয়ে পাই, $3-x^2=-2x$

বা, $x^2-2x-3=0$ বা, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ অথবা $x=3$

$x=-1$ হলে (5) থেকে পাই, $y=1$

$x=3$ হলে (5) থেকে পাই, $y=-3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(-1,1),(3,-3)$

উদাহরণ ৩২. সমাধান কর: $18y^x-y^{2x}=81,\ 3^x=y^2$

সমাধান: $18y^x-y^{2x}=81 \cdots (1) \qquad 3^x=y^2 \cdots (2)$

(1) থেকে পাই, $y^{2x}-18y^x+81=0$ বা, $(y^x-9)^2=0$

বা, $y^x-9=0$ বা, $y^x=3^2 \cdots (3)$

(2) থেকে পাই, $(3^x)^x=(y^2)^x$ বা, $3^{x^2}=y^{2x} \cdots (4)$

(3) থেকে পাই, $(y^x)^2=(3^2)^2$ বা, $y^{2x}=3^4 \cdots (5)$

(4) ও (5) থেকে পাই, $3^{x^2}=3^4$

$\therefore x^2=4$ বা, $x=\pm 2$

$x=2$ হলে (2) থেকে পাই, $y^2=9$ বা, $y=\pm 3$

$x=-2$ হলে (3) থেকে পাই, $y^{-2}=9$ বা, $y^2=\dfrac{1}{9}$ বা, $y=\pm\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(2,3),(2,-3),\left(-2,\dfrac{1}{3}\right),\left(-2,-\dfrac{1}{3}\right)$

অনুশীলনী ৫.৬

সমাধান কর:

১. $2^x+3^y=31$
$2^x-3^y=-23$

২. $3^x=9^y$
$5^{x+y+1}=25^{xy}$

৩. $3^x\cdot 9^y=81$
$2x-y=8$

৪. $2^x\cdot 3^y=18$
$2^{2x}\cdot 3^y=36$

৫. $a^x\cdot a^{y+1}=a^7$
$a^{2y}\cdot a^{3x+5}=a^{20}$

৬. $y^x=x^2$
$x^{2x}=y^4\ (y\neq 1)$

৭. $y^x = 4$
$y^2 = 2^x$

৮. $4^x = 2^y$
$(27)^{xy} = 9^{y+1}$

৯. $8y^x - y^{2x} = 16$
$2^x = y^2$

লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান আমরা ইতোপূর্বে বীজগণিতীয় পদ্ধতিতে শিখেছি। এখন লেখচিত্রের সাহায্যে ইহার সমাধান পদ্ধতি আলোচনা করা হবে।

মনে করি $y = ax^2 + bx + c$। তাহলে x এর যে সকল মানের জন্য $y = 0$ হবে অর্থাৎ লেখচিত্রটি x-অক্ষকে ছেদ করবে, x এর ঐ সকল মান-ই $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির সমাধান।

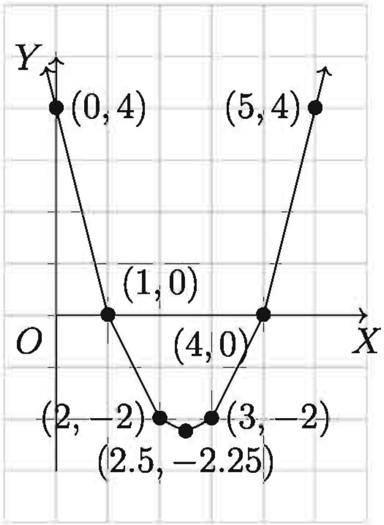
উদাহরণ ৩৩. লেখচিত্রের সাহায্যে $x^2 - 5x + 4 = 0$ এর সমাধান কর।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 - 5x + 4 = 0 \cdots (1)$ মনে করি, $y = x^2 - 5x + 4 \cdots (2)$

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে (2) নং এর কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	0	1	2	2.5	3	4	5
y	4	0	−2	−2.25	−2	0	4

উপরের সারণিতে প্রদত্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (2) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।



দেখা যায় যে লেখচিত্রটি X অক্ষকে $(1, 0)$ ও $(4, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে।

সুতরাং, (1) নং এর সমাধান $x = 1,\ x = 4$।

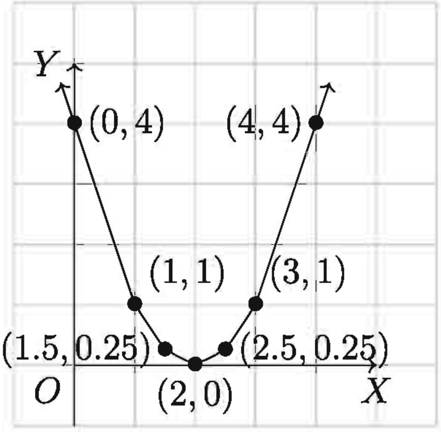
উদাহরণ ৩৪. লেখচিত্রের সাহায্যে $x^2 - 4x + 4 = 0$ এর সমাধান কর।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 - 4x + 4 = 0 \cdots (1)$ মনে করি, $y = x^2 - 4x + 4 \cdots (2)$

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে (2) নং এর কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	0	1	1.5	2	2.5	3	4
y	4	1	0.25	0	0.25	1	4

উপরের সারণি হতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (2) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।



লেখচিত্রে দেখা যায় যে ইহা X অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। যেহেতু দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল থাকে, সেহেতু (1) নং এর সমাধান হবে $x = 2, \; x = 2$।

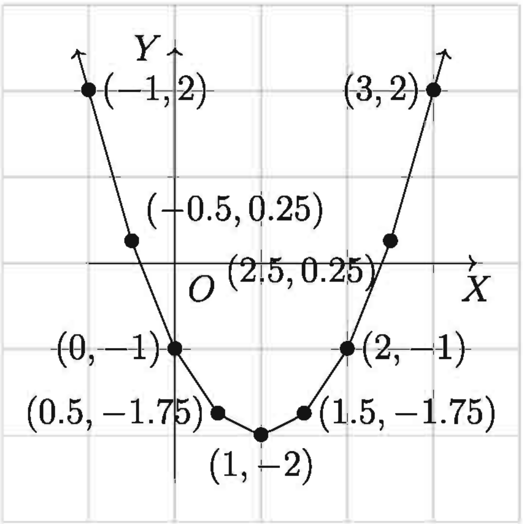
উদাহরণ ৩৫. লেখচিত্রের সাহায্যে $x^2 - 2x - 1 = 0$ এর সমাধান কর।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 - 2x - 1 = 0 \cdots (1)$ মনে করি, $y = x^2 - 2x - 1 \cdots (2)$

সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করি:

x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	2	0.25	-1	-1.75	-2	-1.75	-1	0.25	2

সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (2) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি।



দেখা যায় যে লেখচিত্রটি X অক্ষকে $(-0.4, 0)$ ও $(2.4, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং, (1) নং এর সমাধান $x = -0.4$ (আসন্ন), $x = 2.4$ (আসন্ন)।

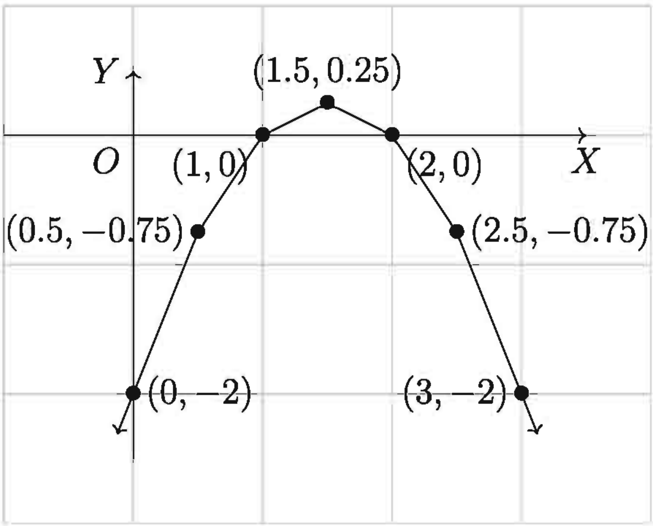
উদাহরণ ৩৬. $-x^2 + 3x - 2 = 0$ এর মূলদ্বয় লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত সমীকরণ $-x^2+3x-2 = 0 \cdots (1)$ মনে করি, $y = -x^2+3x-2 \cdots (2)$

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে (2) নং এর লেখচিত্রের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	-2	-0.75	0	0.25	0	-0.75	-2

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (2) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। দেখা যায় যে লেখচিত্রটি X অক্ষের উপর $(1, 0)$ ও $(2, 0)$ বিন্দু দিয়ে গিয়েছে। সুতরাং (1) নং এর সমাধান $x = 1$, $x = 2$।



উদাহরণ ৩৭. $x^2 + 4x = m$

ক) $m = -4$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

খ) $m = 5$ হলে, প্রাপ্ত সমীকরণটির নিশ্চায়ক নির্ণয় কর এবং মূলের প্রকৃতি ব্যাখ্যা কর।

গ) $\sqrt{m-4} + \sqrt{m-10} = 6$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে, $x^2 + 4x = m$

এখন, $m = -4$ হলে, $x^2 + 4x = -4$

বা, $x^2 + 4x + 4 = 0$

বা, $(x+2)^2 = 0$

বা, $x + 2 = 0,\ x + 2 = 0$

$\therefore x = -2,\ -2$

খ) দেওয়া আছে, $x^2 + 4x = m$

এখন, $m = 5$ হলে, $x^2 + 4x = 5$

বা, $x^2 + 4x - 5 = 0$

সমীকরণটির নিশ্চায়ক, $4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$, যা একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

যেহেতু সমীকরণটির নিশ্চায়ক ধনাত্মক এবং পূর্ণবর্গ সংখ্যা, সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব অসমান ও মূলদ হবে।

গ) দেওয়া আছে, $\sqrt{m-4} + \sqrt{m-10} = 6$

বা, $\sqrt{m-4} = 6 - \sqrt{m-10}$

বা, $\left(\sqrt{m-4}\right)^2 = \left(6 - \sqrt{m-10}\right)^2$

বা, $m - 4 = 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{m-10} + m - 10$

বা, $12\sqrt{m-10} = 26 + 4$

বা, $12\sqrt{m-10} = 30$

বা, $2\sqrt{m-10} = 5$

বা, $\left(2\sqrt{m-10}\right)^2 = 25$

বা, $4(m - 10) = 25$

বা, $4m - 40 - 25 = 0$

বা, $4(x^2 + 4x) - 65 = 0$

বা, $4x^2 + 16x - 65 = 0$

বা, $4x^2 + 26x - 10x - 65 = 0$

বা, $2x(2x + 13) - 5(2x + 13) = 0$

বা, $(2x + 13)(2x - 5) = 0$

$\therefore 2x + 13 = 0$ অথবা, $2x - 5 = 0$

বা, $2x = -13$ বা, $2x = 5$

বা, $x = -\frac{13}{2}$ বা, $x = \frac{5}{2}$

$x = -\frac{13}{2}$ অথবা $x = \frac{5}{2}$ হলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

$\therefore x = -\frac{13}{2}, \frac{5}{2}$

অনুশীলনী ৫.৭

১. $x^2 - x - 12 = 0$ সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করলে b এর মান কোনটি?

ক) 0 খ) 1 গ) -1 ঘ) 3

২. $16^x = 4^{x+1}$ সমীকরণটির সমাধান কোনটি?

ক) 2 খ) 1 গ) 4 ঘ) 3

৩. $x^2 - x - 13 = 0$ হলে সমীকরণটির একটি মূল কোনটি?

ক) $-\frac{-1 + \sqrt{51}}{2}$ খ) $-\frac{-1 - \sqrt{51}}{2}$

গ) $-\frac{1 + \sqrt{-51}}{2}$ ঘ) $-\frac{1 + \sqrt{53}}{2}$

8. $y^x = 9$, $y^2 = 3^x$ সমীকরণ জোটের একটি সমাধান কোনটি?

ক) $(-3, -3)$ খ) $\left(2, \frac{1}{3}\right)$

গ) $\left(-2, \frac{1}{3}\right)$ ঘ) $(-2, 3)$

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৫ ও ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

দুইটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার বর্গের অন্তর 11 এবং গুণফল 30।

৫. সংখ্যা দুইটি কী কী?

ক) 1 এবং 30 খ) 2 এবং 15 গ) 5 এবং 6 ঘ) 5 এবং -6

৬. সংখ্যা দুইটির বর্গের সমষ্টি কত?

ক) 1 খ) 5 গ) 61 ঘ) $\sqrt{41}$

৭. একটি সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি 6। সম্ভাব্য সমীকরণটির গঠন হবে

(i) $x+\dfrac{1}{x}=6$

(ii) $x^2+1=6x$

(iii) $x^2-6x-1=0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৮. $2^{px-1}=2^{2px-2}$ এর সমাধান কোনটি?

ক) $\dfrac{p}{2}$ খ) p গ) $-\dfrac{p}{2}$ ঘ) $\dfrac{1}{p}$

৯. লেখচিত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান কর:

ক) $x^2-4x+3=0$ খ) $x^2+2x-3=0$ গ) $x^2+7x=0$
ঘ) $2x^2-7x+3=0$ ঙ) $2x^2-5x+2=0$ চ) $x^2+8x+16=0$
ছ) $x^2+x-3=0$ জ) $x^2=8$

১০. একটি সংখ্যার বর্গের দ্বিগুণ সংখ্যাটির 5 গুণ থেকে 3 কম। কিন্তু ঐ সংখ্যাটির বর্গের 5 গুণ সংখ্যাটির 2 গুণ থেকে 3 বেশি।

ক) উদ্দীপকের তথ্যগুলোর সাহায্যে সমীকরণ গঠন কর।

খ) সূত্র প্রয়োগ করে ১ম সমীকরণটি সমাধান কর।

গ) ২য় সমীকরণটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।

১১. জনাব আশফাক আলীর আয়তাকার এক খণ্ড জমির ক্ষেত্রফল 0.12 হেক্টর। জমিটির অর্ধপরিসীমা এর একটি কর্ণ অপেক্ষা 20 মিটার বেশি। তিনি তাঁর জমি থেকে করিম সাহেবের নিকট আয়তাকার এক তৃতীয়াংশ বিক্রি করেন। করিম সাহেবের জমির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা 5 মিটার বেশি। [1 হেক্টর $= 10,000$ বর্গমিটার]

ক) উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ গঠন কর।

খ) আশফাক আলীর জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

গ) করিম সাহেবের জমির কর্ণের দৈর্ঘ্য ও পরিসীমা নির্ণয় কর।

১২. $f(x)=x^2-6x+15$ এবং $g(x)=x^2-6x+13$

ক) $f(x)=7$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

খ) $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$ হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।

গ) $g(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

১৩. পাঁচটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার অঙ্কগুলোর যোগফল কি পরবর্তী পাঁচটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার অঙ্কগুলোর যোগফল দিয়ে গুণ করলে গুণফল 120635 হতে পারে?

১৪. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের ব্যবধান 1 সেমি। তার ক্ষেত্রফলের শেষ অঙ্ক যদি 6 হয় তাহলে তার কোন বাহুর দৈর্ঘ্য পূর্ণবর্গ হতে পারে কি?

১৫. ঘড়ির ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা কতবার পরস্পর ঠিক বিপরীত দিকে বসে? সময়গুলো বের কর।

১৬. ঘড়ির ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা কতবার ঠিক লম্বালম্বি হয়ে বসে? সময়গুলো বের কর।

১৭. ঘড়ির ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা পরস্পর স্থান পরিবর্তন করলে সময় শুদ্ধ নাও হতে পারে। যেমন 6 টার সময় এই পরিবর্তন করলে ঘণ্টার কাঁটা ঠিক 12 টায় আর মিনিটের কাঁটা ঠিক 6 টায় -- সময় না সাড়ে এগারোটা না সাড়ে বারোটা। 12 টার পরে এবং 1 টার পূর্বে এমন একটি সময় বের কর যখন এই পরিবর্তনের পরেও সময় গাণিতিকভাবে শুদ্ধ হবে। এমন সর্বমোট কতগুলো সময় রয়েছে যখন এই কাঁটা পরিবর্তনে শুদ্ধ সময় পাওয়া যাবে? [শ্রুতি রয়েছে রোগশয্যায়-থাকা আইনস্টাইন এরকম একটি প্রশ্ন জিজ্ঞাসার সঙ্গে সঙ্গে উত্তর করেছিলেন]

অধ্যায় ৬

অসমতা (Inequality)

সমীকরণ বা সমতা সম্পর্কে আমাদের ধারণা হয়েছে। কিন্তু বাস্তব জীবনে অসমতারও একটা বিস্তৃত ও গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রয়েছে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা -

- ▶ এক ও দুই চলকের এক ঘাতবিশিষ্ট অসমতা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ দুই চলকবিশিষ্ট সরল অসমতা গঠন ও সমাধান করতে পারবে।
- ▶ বাস্তবভিত্তিক গাণিতিক সমস্যায় অসমতা ব্যবহার করে সমাধান করতে পারবে।
- ▶ এক ও দুই চলকবিশিষ্ট অসমতাকে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান করতে পারবে।

অসমতার ধারণা

মনে করি একটি ক্লাসের ছাত্রসংখ্যা 200 জন। স্বাভাবিকভাবে দেখা যায় যে, ঐ ক্লাসে সবদিন সকলে উপস্থিত থাকে না, সকলে অনুপস্থিতও থাকে না। একটি নির্দিষ্ট দিনে উপস্থিত ছাত্র সংখ্যা x হলে আমরা লিখতে পারি $0 < x < 200$। একইভাবে আমরা দেখি যে, কোনো নিমন্ত্রিত অনুষ্ঠানেই সবাই উপস্থিত হয় না। পোশাক-পরিচ্ছদ ও অন্যান্য অনেক ভোগ্যপণ্য তৈরিতে পরিষ্কারভাবে অসমতার ধারণা প্রয়োজন হয়। দালান তৈরির ক্ষেত্রে, পুস্তক মুদ্রণের ক্ষেত্রে এবং এরকম আরও অনেক ক্ষেত্রে উপাদানগুলো সঠিক পরিমাণে নির্ণয় করা যায় না বিধায় প্রথম পর্যায়ে অনুমানের ভিত্তিতে উপাদানগুলো ক্রয় বা সংগ্রহ করতে হয়। অতএব দেখা যাচ্ছে যে, আমাদের দৈনন্দিন জীবনে অসমতার ধারণাটা খুবই গুরুত্বপূর্ণ।

বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে

$a > b$ যদি ও কেবল যদি $(a - b)$ ধনাত্মক অর্থাৎ $(a - b) > 0$

$a < b$ যদি ও কেবল যদি $(a - b)$ ঋণাত্মক অর্থাৎ $(a - b) < 0$

অসমতার কয়েকটি বিধি:

ক) $a < b \Leftrightarrow b > a$

খ) $a > b$ হলে যেকোনো c এর জন্য

$a+c > b+c$ এবং $a-c > b-c$

গ) $a > b$ হলে যেকোনো c এর জন্য

$ac > bc$ এবং $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ যখন $c > 0$

$ac < bc$ এবং $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ যখন $c < 0$

উদাহরণ ১. $x < 2$ হলে

ক) $x+2 < 4$ [উভয়পক্ষে 2 যোগ করে]

খ) $x-2 < 0$ [উভয়পক্ষে 2 বিয়োগ করে]

গ) $2x < 4$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

ঘ) $-3x > -6$ [উভয়পক্ষকে -3 দ্বারা গুণ করে]

এখানে উল্লেখ্য যে,

$a \geq b$ এর অর্থ $a > b$ অথবা $a = b$

$a \leq b$ এর অর্থ $a < b$ অথবা $a = b$

$a < b < c$ এর অর্থ $a < b$ এবং $b < c$ যার অর্থ $a < c$

উদাহরণ ২. $3 \geq 1$ সত্য যেহেতু $3 > 1$

$2 \leq 4$ সত্য যেহেতু $2 < 4$

$2 < 3 < 4$ সত্য যেহেতু $2 < 3$ এবং $3 < 4$

কাজ:

ক) তোমাদের শ্রেণির যে সকল ছাত্র-ছাত্রীর উচ্চতা 5 ফুটের চেয়ে বেশি এবং 5 ফুটের চেয়ে কম তাদের উচ্চতা অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) কোনো পরীক্ষার মোট নম্বর 1000 হলে, একজন পরীক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

উদাহরণ ৩. সমাধান কর ও সমাধান সেটটি সংখ্যারেখায় দেখাও: $4x+4 > 16$

সমাধান: দেওয়া আছে, $4x+4 > 16$

বা, $4x+4-4 > 16-4$ [উভয়পক্ষ থেকে 4 বিয়োগ করে]

বা, $4x > 12$

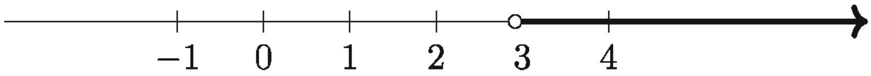
বা, $\frac{4x}{4} > \frac{12}{4}$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x > 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x > 3$

এখানে সমাধান সেট, $S = \{x \in R : x > 3\}$

সমাধান সেটটি নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো।



উদাহরণ ৪. সমাধান কর এবং সমাধান সেট সংখ্যারেখায় দেখাও: $x - 9 > 3x + 1$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x - 9 > 3x + 1$

বা, $x - 9 + 9 > 3x + 1 + 9$

বা, $x > 3x + 10$

বা, $x - 3x > 3x + 10 - 3x$

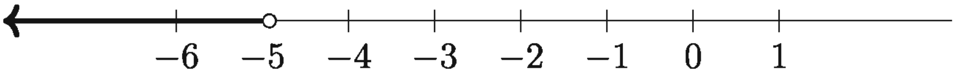
বা, $-2x > 10$

বা, $\frac{-2x}{-2} < \frac{10}{-2}$ [উভয়পক্ষকে -2 দ্বারা ভাগ করায় অসমতার দিক পাল্টে গেছে]

বা, $x < -5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x < -5$

সমাধান সেটটি নিচে অঙ্কিত সংখ্যা রেখায় দেখানো হলো।



বিশেষ দ্রষ্টব্য: সমীকরণের সমাধান যেমন একটি সমীকরণ (সমতা) দ্বারা প্রকাশ পায়, তেমনি অসমতার সমাধান একটি অসমতা দ্বারা প্রকাশ পায়। অসমতার সমাধান সেট (সাধারণত) বাস্তব সংখ্যার অসীম উপসেট।

উদাহরণ ৫. সমাধান কর: $a(x+b) < c, [a \neq 0]$

সমাধান: a ধনাত্মক হলে, $\frac{a(x+b)}{a} < \frac{c}{a}$ [উভয়পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x + b < \frac{c}{a}$ বা, $x < \frac{c}{a} - b$

a ঋণাত্মক হলে একই প্রক্রিয়ায় পাই, $\frac{a(x+b)}{a} > \frac{c}{a}$

বা, $x + b > \frac{c}{a}$ বা, $x > \frac{c}{a} - b$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: (i) $x < \frac{c}{a} - b$ যদি $a > 0$ হয়, (ii) $x > \frac{c}{a} - b$ যদি $a < 0$ হয়।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: a যদি শূন্য এবং c যদি ধনাত্মক হয়, তবে x এর যেকোনো মানের জন্য অসমতাটি সত্য হবে। কিন্তু a যদি শূন্য এবং c ঋণাত্মক হয়, তবে অসমতাটির কোনো সমাধান থাকবে না।

অনুশীলনী ৬.১

অসমতাগুলো সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখাও:

১. $y - 3 < 5$

২. $3(x-2) < 6$

৩. $3x - 2 > 2x - 1$

৪. $z \leq \frac{1}{2}z + 3$

৫. $8 \geq 2 - 2x$

৬. $x \leq \frac{x}{3} + 4$

৭. $5(3 - 2t) \leq 3(4 - 3t)$

৮. $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} > \frac{47}{60}$

অসমতার ব্যবহার

সমীকরণের সাহায্যে তোমরা সমস্যা সমাধান করতে শিখেছ। একই পদ্ধতিতে অসমতা সম্পর্কিত সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

উদাহরণ ৬. কোনো পরীক্ষায় বাংলা ১ম ও ২য় পত্রে ফাতেমা পেয়েছে যথাক্রমে $5x$ এবং $6x$ নম্বর এবং রহিমা পেয়েছে $4x$ এবং 84 নম্বর। কোনো পত্রে কেউ 40 এর নিচে পায়নি। বাংলা বিষয়ে রহিমা হয়েছে প্রথম এবং ফাতেমা হয়েছে দ্বিতীয়। x এর মান সম্ভাব্য অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান: ফাতেমা পেয়েছে মোট $5x + 6x$ নম্বর এবং রহিমা পেয়েছে মোট $4x + 84$ নম্বর।

প্রশ্নমতে, $5x + 6x < 4x + 84$

বা, $5x + 6x - 4x < 84$ বা, $7x < 84$

বা, $x < \frac{84}{7}$ বা, $x < 12$

কিন্তু, $4x \geq 40$ [প্রাপ্ত সর্বনিম্ন নম্বর 40] বা, $x \geq 10$ বা, $10 \leq x$

$\therefore 10 \leq x < 12$

উদাহরণ ৭. একজন ছাত্র 5 টাকা দরে x টি পেন্সিল এবং 8 টাকা দরে $(x+4)$ টি খাতা কিনেছে। মোট মূল্য অনূর্ধ্ব 97 টাকা হলে, সর্বাধিক কয়টি পেন্সিল কিনেছে?

সমাধান: x টি পেন্সিলের দাম $5x$ টাকা এবং $x+4$ টি খাতার দাম $8(x+4)$ টাকা।

প্রশ্নমতে, $5x + 8(x+4) \leq 97$

বা, $5x + 8x + 32 \leq 97$

বা, $13x \leq 65$

বা, $x \leq \frac{65}{13}$

বা, $x \leq 5$

$\therefore$ ছাত্রটি সর্বাধিক 5 টি পেন্সিল কিনেছে।

> **কাজ:** 140 টাকা কেজি দরে জনাব ডেভিড x কেজি আপেল কিনলেন। তিনি বিক্রেতাকে 1000 টাকার একখানা নোট দিলেন। বিক্রেতা 50 টাকার x খানা নোটসহ বাকী টাকা ফেরত দিলেন। সমস্যাটিকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং x এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ৬.২

১-৫ পর্যন্ত সমস্যাগুলো অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং x এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

১. এক বালক ঘন্টায় x কি.মি. বেগে 3 ঘন্টা হাঁটল এবং ঘন্টায় $(x+2)$ কি.মি. বেগে $\frac{1}{2}$ ঘন্টা দৌড়াল এবং তার অতিক্রান্ত পথ 29 কি.মি. এর কম।

২. একটি বোর্ডিং এ রোজ $4x$ কেজি চাল এবং $(x-3)$ কেজি ডাল লাগে এবং চাল ও ডাল মিলে 40 কেজির বেশি লাগে না।

৩. সোহরাব সাহেব 70 টাকা কেজি দরে x কেজি আম কিনলেন। তিনি বিক্রেতাকে 500 টাকার একখানা নোট দিলেন। বিক্রেতা 20 টাকার x খানা নোটসহ বাকি টাকা ফেরত দিলেন।

৪. একটি গাড়ি 4 ঘন্টায় যায় x কি.মি. এবং 5 ঘন্টায় যায় $(x+120)$ কি.মি.। গাড়িটির গড় গতিবেগ ঘন্টায় 100 কি.মি. এর বেশি নয়।

৫. এক টুকরা কাগজের ক্ষেত্রফল 40 বর্গ সে.মি.। তা থেকে x সে.মি. দীর্ঘ এবং 5 সে.মি. প্রস্থ বিশিষ্ট আয়তাকার কাগজ কেটে নেওয়া হলো।

৬. পুত্রের বয়স মাতার বয়সের এক-তৃতীয়াংশ। পিতা মাতার চেয়ে 6 বছরের বড়। তিনজনের বয়সের সমষ্টি অনূর্ধ্ব 90 বছর। পিতার বয়স অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

৭. জেনি 14 বছর বয়সে জুনিয়র বৃত্তি পরীক্ষা দিয়েছিল। 17 বছর বয়সে সে এস.এস.সি. পরীক্ষা দিবে। তার বর্তমান বয়স অসমতায় প্রকাশ কর।

৮. একখানি জেট প্লেনের গতি প্রতি সেকেন্ডে সর্বাধিক 300 মিটার। প্লেনটি 15 কি.মি. যাওয়ার প্রয়োজনীয় সময় অসমতায় প্রকাশ কর।

৯. ঢাকা থেকে সিঙ্গাপুর বিমান পথে দূরত্ব 2900 কি.মি.। জেট বিমানের সর্বোচ্চ গতিবেগ ঘন্টায় 900 কি.মি.। কিন্তু ঢাকা থেকে সিঙ্গাপুর যাবার পথে প্রতিকূল দিকে ঘন্টায় 100 কি.মি. বেগে বায়ু প্রবাহের সম্মুখীন হতে হয়। ঢাকা থেকে সিঙ্গাপুর বিরতিহীন উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময় একটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

১০. পূর্ববর্তী প্রশ্নের সূত্র ধরে, সিঙ্গাপুর থেকে ঢাকা ফেরার পথে উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময় একটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

১১. কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার 5 গুণ, সংখ্যাটির দ্বিগুণ এবং 15 এর সমষ্টি অপেক্ষা ছোট। সংখ্যাটির সম্ভাব্য মান অসমতায় প্রকাশ কর।

দুই চলকবিশিষ্ট সরল একঘাত অসমতা

আমরা দুই চলকবিশিষ্ট $y = mx + c$ (যার সাধারণ আকার $ax + by + c = 0$) আকারের সরল সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে শিখেছি (অষ্টম ও নবম-দশম শ্রেণিতে)। আমরা দেখেছি যে, এ রকম প্রত্যেক লেখচিত্রই একটি সরলরেখা। স্থানাঙ্কায়িত XY সমতলে $ax+by+c = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রের যেকোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে অর্থাৎ সমীকরণটির বামপক্ষে x ও y এর পরিবর্তে যথাক্রমে ঐ বিন্দুর ভুজ ও কোটি বসালে এর মান শূন্য হয়। অন্যদিকে, লেখস্থিত নয় এমন কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে না অর্থাৎ ঐ বিন্দুর ভুজ ও কোটির জন্য $ax+by+c$ এর মান শূন্য অপেক্ষা বড় বা ছোট হয়। সমতলস্থ কোনো বিন্দু P এর ভুজ ও কোটি দ্বারা $ax+by+c$ রাশির x ও y কে যথাক্রমে প্রতিস্থাপন করলে রাশিটির যে মান হয়, তাকে P বিন্দুতে রাশিটির মান বলা হয় এবং উক্ত মানকে সাধারণত $f(P)$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। P বিন্দু লেখস্থিত হলে $f(P) = 0, P$ বিন্দু লেখচিত্রের বহিঃস্থ হলে $f(P) > 0$ অথবা $f(P) < 0$।

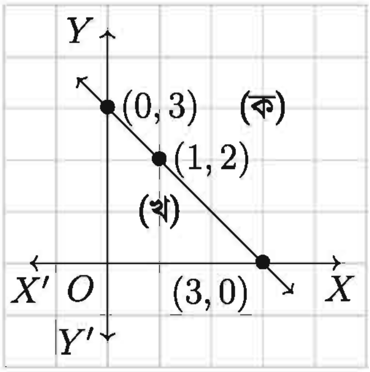
বাস্তবে লেখচিত্রের বহিঃস্থ সকল বিন্দু লেখ দ্বারা দুইটি অর্ধতলে বিভক্ত হয়; একটি অর্ধতলের প্রত্যেক বিন্দু P এর জন্য $f(P) > 0$; অপর অর্ধতলের প্রত্যেক বিন্দু P এর জন্য $f(P) < 0$। বলা বাহুল্য, লেখের উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দু P এর জন্য $f(P) = 0$।

উদাহরণ ৮. $x + y - 3 = 0$ সমীকরণটি বিবেচনা করি।

সমীকরণটি থেকে পাওয়া যায়: $y = 3 - x$

x	0	3	1
y	3	0	2

(x, y) সমতলে ছক কাগজে ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে সমীকরণটির লেখচিত্রটি নিম্নরূপ হয়:



এই লেখচিত্র রেখা সমগ্র তলটিকে তিনটি অংশে পৃথক করে। যথা:

১. রেখার (ক) চিহ্নিত পাশের বিন্দুসমূহ

২. রেখার (খ) চিহ্নিত পাশের বিন্দুসমূহ এবং

৩. রেখাস্থিত বিন্দুসমূহ

এখানে (ক) চিহ্নিত অংশকে লেখরেখার উপরের অংশ ও (খ) চিহ্নিত অংশকে লেখরেখার নিচের অংশ বলা যায়।

(ক) চিহ্নিত পাশে তিনটি বিন্দু $(3, 3), (4, 1), (6, -1)$ নিই। এই বিন্দুগুলোতে $x + y - 3$ এর মান যথাক্রমে $3, 2, 2$ যাদের সবকটিই ধনাত্মক।

(খ) চিহ্নিত পাশে তিনটি বিন্দু $(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$ নিই। এই বিন্দুগুলোতে $x + y - 3$ এর মান যথাক্রমে $-3, -1, -5$ যাদের সবকটিই ঋণাত্মক।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: $ax + by + c = 0$ লেখরেখার এক পাশে একটি বিন্দু নিয়ে সেখানে $ax + by + c$ এর মান নির্ণয় করে রেখাটির দুই পাশ (ধনাত্মক ও ঋণাত্মক) নির্ণয় করা যায়।

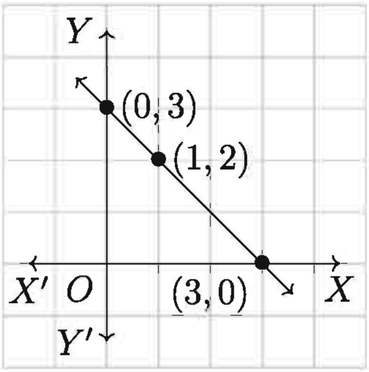
দুই চলকবিশিষ্ট অসমতার লেখচিত্র

উদাহরণ ৯. $x + y - 3 > 0$ অথবা $x + y - 3 < 0$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

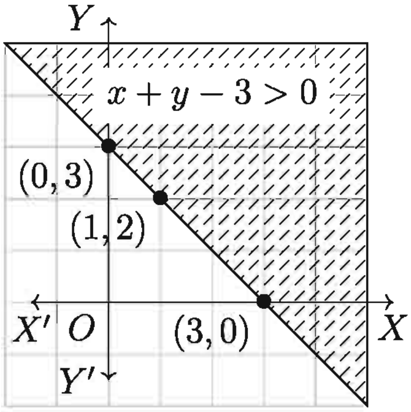
সমাধান: উপরোক্ত অসমতাদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন করতে প্রথমেই ছক কাগজে $x + y - 3 = 0$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$x + y - 3 = 0$ সমীকরণ থেকে পাই

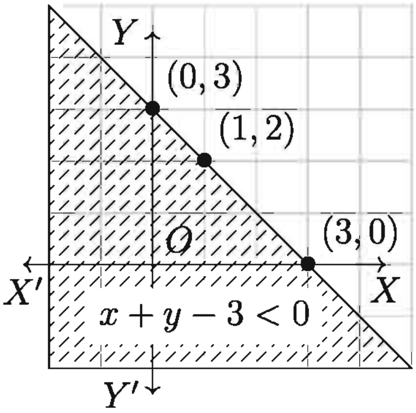
x	0	3	1
y	3	0	2



$x+y-3>0$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য উক্ত অসমতায় মূলবিন্দু $(0,0)$ বসালে আমরা পাই $-3>0$ যা সত্য নয়। কাজেই, অসমতার ছায়াচিত্র হবে $x+y-3=0$ রেখার যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে তার বিপরীত পাশে।



$x+y-3<0$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য উক্ত অসমতায় মূলবিন্দু $(0,0)$ বসালে পাওয়া যায় $-3<0$ যা অসমতাকে সিদ্ধ করে বা মান সত্য। কাজেই, এ অবস্থায় অসমতার ছায়াচিত্র হবে রেখাটির যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে সে পাশে।



উদাহরণ ১০. $2x-3y+6\geq 0$ অসমতার সমাধান সেটের বর্ণনা দাও ও চিত্রিত কর।

সমাধান: আমরা প্রথমে $2x-3y+6=0$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি।

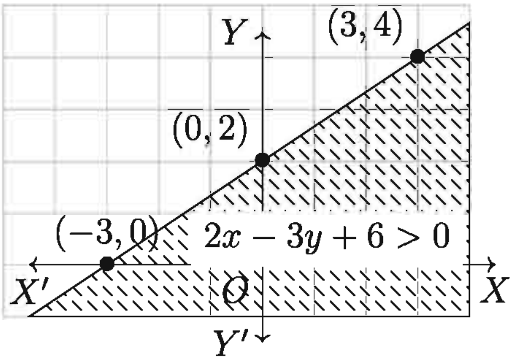
সমীকরণটি থেকে পাওয়া যায়:

$2x - 3y + 6 = 0$ বা, $y = \frac{2x}{3} + 2$

এ লেখচিত্রস্থিত কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক:

x	0	-3	3
y	2	0	4

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(0, 2)$, $(-3, 0)$, $(3, 4)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



এখন মূলবিন্দু $(0, 0)$ তে $2x - 3y + 6$ রাশির মান 6, যা ধনাত্মক। সুতরাং লেখচিত্র রেখাটির যে পার্শে মূলবিন্দু রয়েছে সেই পাশের সকল বিন্দুর জন্যই $2x - 3y + 6 > 0$

অতএব, $2x - 3y + 6 \geq 0$ অসমতার সমাধান সেট $2x - 3y + 6 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রস্থিত সকল বিন্দুর এবং লেখচিত্রের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমন্বয়ে গঠিত।

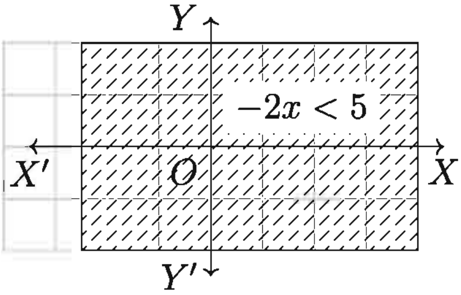
এই সমাধান সেটের লেখচিত্র উপরের চিত্রের চিহ্নিত অংশটুকু যার মধ্যে লেখচিত্র রেখাটিও অন্তর্ভুক্ত।

উদাহরণ ১১. XY সমতলে $-2x < 5$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: $-2x < 5$ অসমতাটিকে এভাবে লেখা যায়।

$2x + 5 > 0$ বা, $2x > -5$ বা, $x > -\frac{5}{2}$

এখন স্থানাঙ্কায়িত XY সমতলে $x = -\frac{5}{2}$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ বিন্দু দিয়ে Y অক্ষের সমান্তরাল করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



এই লেখচিত্র রেখার ডান পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত এবং মূলবিন্দুতে $x = 0$ যা $> -\frac{5}{2}$

সুতরাং লেখচিত্র রেখার ডান পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কই প্রদত্ত অসমতার সমাধান (লেখচিত্র রেখার বিন্দুগুলো বিবেচ্য নয়)। সমাধান সেটের লেখচিত্র উপরের চিত্রের চিহ্নিত অংশটুকু (যার মধ্যে লেখচিত্র রেখাটি অন্তর্ভুক্ত নয়)।

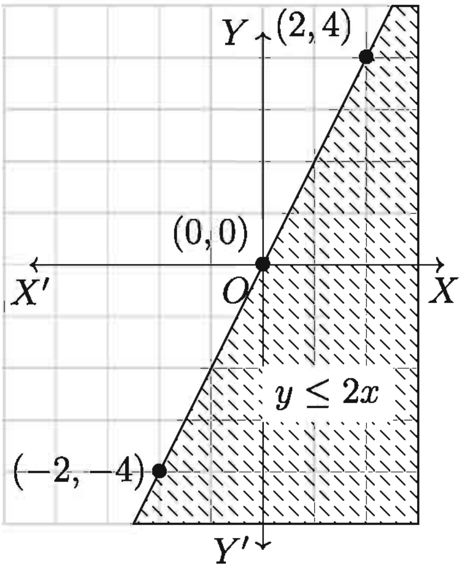
উদাহরণ ১২. $y \leq 2x$ অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: $y \leq 2x$ অসমতাটিকে $y - 2x \leq 0$ আকারে লেখা যায়।

এখন $y - 2x = 0$ অর্থাৎ $y = 2x$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	0	2	-2
y	0	4	-4

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(0, 0)$, $(2, 4)$, $(-2, -4)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



$(1, 0)$ বিন্দুটি লেখচিত্র রেখার ডানের অংশে আছে। এই বিন্দুতে $y - 2x = 0 - 2 \times 1 = -2 < 0$

সুতরাং লেখচিত্র রেখাটি ও তার ডানের অংশ [অর্থাৎ যে অংশে $(1, 0)$ বিন্দুটি অবস্থিত] সমন্বয়ে গঠিত

সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

অনুশীলনী ৬.৩

১. $5x + 5 > 25$ অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি?
ক) $S = \{x \in R : x > 4\}$ খ) $S = \{x \in R : x < 4\}$
গ) $S = \{x \in R : x \leq 4\}$ ঘ) $S = \{x \in R : x \geq 4\}$

২. $x + y = -2$ সমীকরণটিতে x এর কোন মানের জন্য $y = 0$ হবে?
ক) 2 খ) 0 গ) 4 ঘ) -2

৩. $2xy + y = 3$ সমীকরণটির সঠিক স্থানাংক কোনগুলো?
ক) $(1, -1), (2, -1)$ খ) $(1, 1), (-1, -3)$
গ) $(1, 1), (-2, 1)$ ঘ) $(-1, 1), (2, -1)$

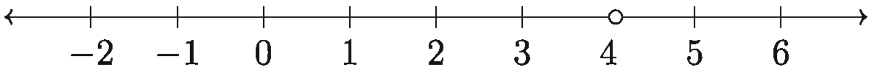
নিম্নোক্ত অসমতাটি থেকে ৪ ও ৫ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$x \leq \frac{x}{4} + 3$$

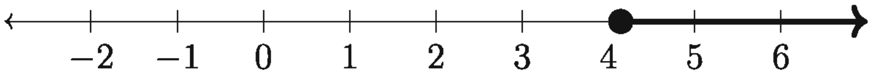
৪. অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি?
ক) $S = \{x \in R : x > 4\}$ খ) $S = \{x \in R : x < 4\}$
গ) $S = \{x \in R : x \leq 4\}$ ঘ) $S = \{x \in R : x \geq 4\}$

৫. অসমতাটির সমাধান সেটের সংখ্যা রেখা কোনটি?

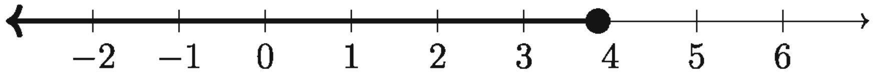
ক)



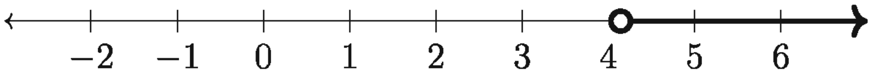
খ)



গ)



ঘ)

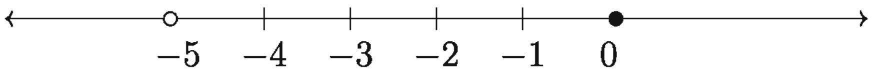


৬. $3x + 6 > 9$ অসমতাটির

(i) উভয় পক্ষে 3 দ্বারা ভাগ করলে $x + 2 > 3$ পাওয়া যায়

(ii) সমাধান সেট = $\{x \in R : x > 1\}$

(iii) সংখ্যারেখায় সমাধান সেট:



নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

৭. রিতা, মিতা ও বীথির বয়স যথাক্রমে x, $2x$ ও $3x$ বছর এবং তাদের তিন জনের বয়সের সমষ্টি অনূর্ধ্ব 60 বছর হলে

(i) সমস্যাটির গাণিতিক প্রকাশ $x + 2x + 3x \leq 60$

(ii) রিতার বয়স ≤ 10 বছর

(iii) মিতার বয়স > 20 বছর

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii ও iii

৮. a, b ও c তিনটি বাস্তব সংখ্যা। $a > b$ এবং $c \neq 0$ হলে

(i) $ac > bc$ যখন $c > 0$

(ii) $ac < bc$ যখন $c < 0$

(iii) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ যখন $c > 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii ও iii

৯. নিচের প্রত্যেক অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর:

ক) $x - y > -10$ খ) $2x - y < 6$

গ) $3x - y \geq 0$ ঘ) $3x - 2y \leq 12$

ঙ) $y < -2$ চ) $x \geq 4$

ছ) $y > x + 2$ জ) $y < x + 2$

ঝ) $y \geq 2x$ ঞ) $x + 3y < 0$

১০. হযরত শাহজালাল বিমান বন্দর থেকে সিঙ্গাপুর বিমান বন্দরের দূরত্ব 2900 কি.মি.। বাংলাদেশ বিমানের সর্বোচ্চ গতিবেগ 500 কি.মি./ঘন্টা। কিন্তু হযরত শাহজালাল বিমান বন্দর থেকে সিঙ্গাপুর যাবার পথে প্রতিকূলে 60 কি.মি./ঘন্টা বেগে বায়ু প্রবাহের সম্মুখীন হয়।

ক) উদ্দীপকের সমস্যাটির প্রয়োজনীয় সময় t ঘন্টা ধরে সমস্যাটিকে অসমতায় দেখাও।

খ) হযরত শাহজালাল বিমানবন্দর থেকে সিঙ্গাপুর বিমান বন্দর পর্যন্ত বিরতিহীন উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময় ১০ক তে বর্ণিত অসমতা থেকে নির্ণয় কর এবং সংখ্যা রেখায় দেখাও।

২০১৫

গ) সিঙ্গাপুর থেকে হযরত শাহজালাল বিমানবন্দরে ফেরার পথে বিরতিহীন উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময়কে x ধরে সমস্যাটিকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।

১১. দুইটি সংখ্যার ১ম সংখ্যাটির 3 গুণ থেকে ২য় সংখ্যাটির 5 গুণ বিয়োগ করলে 5 অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। আবার ১ম সংখ্যা থেকে ২য় সংখ্যার 3 গুণ বিয়োগ করলে অনুর্ধ্ব 9 হয়।

ক) উদ্দীপকের সমস্যাগুলোকে অসমতায় দেখাও।

খ) ১ম সংখ্যাটির 5 গুণ, ১ম সংখ্যার দ্বিগুণ এবং 15 এর সমষ্টি অপেক্ষা ছোট হলে সংখ্যাটির সম্ভাব্য মান অসমতায় প্রকাশ কর।

গ) ক) এ প্রাপ্ত অসমতা যুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

১২. একটি কলম, একটি রাবার ও একটি খাতার মূল্য 100 টাকা। খাতার মূল্য দুইটি কলমের মূল্যের থেকে বেশি। তিনটি কলমের মূল্য চারটি রাবারের থেকে বেশি এবং তিনটি রাবারের মূল্য একটি খাতার মূল্যের থেকে বেশি। যদি সকল মূল্যই পূর্ণ টাকায় হয় তাহলে প্রত্যেকটির মূল্য কত?

১৩. তিনটি পূর্ণসংখ্যার গুণফল 720 হলে সবচেয়ে ছোট সংখ্যাটি কত বড় হতে পারে?

১৪. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের কোনো একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক দিয়ে ত্রিভুজকে দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত করা হলো। প্রথম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটি কোণ কত বড় হতে পারে? প্রথম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটি কোণ কত ছোট হতে পারে?

১৫. একটি আয়তাকার ঘরে এক বর্গ মিটার ক্ষেত্রফলের 7 টি টেবিল বসানো যায়। ঘরের পরিসীমা 16 মিটার। তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত হতে পারে?

১৬. এমন কোনো ত্রিভুজ আছে কি যার কোনো শীর্ষ থেকে অঙ্কিত উচ্চতাই 1 সে.মি. এর বেশি নয় কিন্তু ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি.?

১৭. সতেজ ও সজীব জমজ ভাই। তাদের দৌড়ানোর বেগ সমান এবং হাঁটার বেগও সমান। একদিন স্কুলে যেতে সতেজ অর্ধেক পথ হাঁটলো আর বাকী অর্ধেক দৌড়ালো। কিন্তু সজীব অর্ধেক সময় হাঁটলো আর বাকী অর্ধেক সময় দৌড়ালো। স্কুলে যেতে কি তাদের সমান সময় লাগবে?

অধ্যায় ৭

অসীম ধারা (Infinite Series)

নবম-দশম শ্রেণির গণিতে অনুক্রম ও সসীম ধারা সম্পর্কে বিশদ আলোচনা করা হয়েছে। অনুক্রম ও অসীম ধারার মধ্যে একটা প্রত্যক্ষ সম্পর্ক রয়েছে। অনুক্রমের পদগুলোর পূর্বে যোগ চিহ্ন যুক্ত করে অসীম ধারা পাওয়া যায়। এ অধ্যায়ে অসীম ধারা নিয়ে আলোচনা করা হবে।

এই অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা -

- অনুক্রমের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অসীম ধারা চিহ্নিত করতে পারবে।
- অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি থাকার শর্ত ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি নির্ণয় করতে পারবে।
- আবৃত্ত দশমিক সংখ্যাকে অনন্ত গুণোত্তর ধারায় প্রকাশ এবং সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে পারবে।

অনুক্রম

নিচে দেখানো সম্পর্কটিতে প্রত্যেক স্বাভাবিক সংখ্যা n এর সঙ্গে n এর বর্গ n^2 সম্পর্কিত। অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ থেকে একটি নিয়মের মাধ্যমে তার বর্গ সংখ্যার সেট $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ পাওয়া যায়। এই সাজানো বর্গসংখ্যার সেটটি একটি অনুক্রম। যখন কতকগুলো রাশি একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যে প্রত্যেক রাশি তার পূর্বের ও পরের রাশির সাথে কীভাবে সম্পর্কিত তা জানা যায়, তখন এভাবে সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম (Sequence) বলা হয়।

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & 4 & 9 & 16 & \cdots & n^2 & \cdots \end{array}$$

উপরের সম্পর্কটিকে ফাংশন বলা হয় এবং $f(n) = n^2$ লেখা হয়। এই অনুক্রমের সাধারণ পদ n^2। যেকোনো অনুক্রমের পদসংখ্যা অসীম। অনুক্রমটি সাধারণ পদের সাহায্যে লেখার পদ্ধতি হলো $\{n^2\}, n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ বা, $\{n^2\}_{n=1}^{+\infty}$ বা কেবলই, $\{n^2\}$। কোনো অনুক্রমের প্রথম রাশিকে প্রথম পদ, দ্বিতীয় রাশিকে দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় রাশিকে তৃতীয় পদ, ইত্যাদি বলা হয়। উপরে বর্ণিত $1, 4, 9, 16, \ldots$ অনুক্রমের প্রথম পদ = 1, দ্বিতীয় পদ = 4, ইত্যাদি। নিচে অনুক্রমের আরো চারটি উদাহরণ দেওয়া হলো:

ক) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

খ) $3, 1, -1, -3, \dots, (5-2n), \dots$

গ) $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \dots, \frac{n}{2n-1}, \dots$

ঘ) $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{17}, \dots, \frac{1}{n^2+1}, \dots$

কাজ:

ক) নিচের অনুক্রমগুলোর সাধারণ পদ নির্ণয় কর:
  (১) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$
  (২) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \dots$
  (৩) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}, \dots$
  (৪) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \dots$

খ) প্রদত্ত সাধারণ পদ হতে অনুক্রমগুলো লেখ:
  (১) $1+(-1)^n$
  (২) $1-(-1)^n$
  (৩) $1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$
  (৪) $\frac{n^2}{\sqrt[n]{\pi}}$
  (৫) $\frac{\ln n}{n}$
  (৬) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

গ) তোমরা প্রত্যেকে একটি করে কোন অনুক্রমের সাধারণ পদ লিখে তারপর অনুক্রমটি লেখ।

ধারা

কোনো অনুক্রমের পদগুলো পরপর যোগ চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা (series) পাওয়া যায়। যেমন, $1+4+9+16+\dots$ একটি ধারা। আবার $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$ আরেকটি ধারা। এই পরের ধারাটির পরপর দুইটি পদের অনুপাত সমান। এ রকম ধারাকে বলা হয় **গুণোত্তর ধারা**। যেকোনো ধারার পরপর দুইটি পদের মধ্যে সম্পর্কের উপর নির্ভর করে ওই ধারাটির বৈশিষ্ট্য। যেমন **সমান্তর ধারার** ক্ষেত্রে পরপর দুইটি পদের অন্তর বা বিয়োগফল সমান হয়।

কোন ধারার পদের সংখ্যার উপর নির্ভর করে ধারাকে নিম্নোক্ত দুইভাবে ভাগ করা যায়। ক) **সসীম বা সান্ত ধারা** (Finite series) খ) **অসীম বা অনন্ত ধারা** (Infinite series) । সসীম ধারা সম্পর্কে নবম-দশম শ্রেণির গণিতে আলোচনা করা হয়েছে। এখানে অসীম ধারা সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

অসীম ধারা (Infinite Series)

বাস্তব সংখ্যার একটি অনুক্রম $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ হলে $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ কে বাস্তব সংখ্যার একটি অসীম ধারা বলা হয়। এই ধারাটির n তম পদ u_n।

অসীম ধারার আংশিক সমষ্টি (Partial Sum of Infinite Series)

$u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$ অনন্ত ধারার

১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = u_1$

২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = u_1 + u_2$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$

$\therefore n$ তম আংশিক সমষ্টি $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$

অর্থাৎ, কোনো অসীম ধারার n তম আংশিক সমষ্টি হচ্ছে ধারাটির প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি।

উদাহরণ ১. প্রদত্ত অসীম ধারা দুইটির আংশিক সমষ্টি নির্ণয় কর।

ক) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots$ খ) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

সমাধান:

ক) ধারাটি একটি সমান্তর ধারা কারণ ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 1$।
সমান্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1\}$
কাজেই $S_n = \frac{n}{2}\{2 + n - 1\} = \frac{n(n+1)}{2}$
উপরের সূত্রে n এর বিভিন্ন মান বসিয়ে পাই,

$$S_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55 \qquad S_{1000} = \frac{1000 \times 1001}{2} = 500500$$

$$S_{100000} = \frac{100000 \times 100001}{2} = 5000050000$$

এভাবে, n এর মান যত বড় করা হয়, S_n এর মান তত বড় হয়।

সুতরাং প্রদত্ত অসীম ধারাটির কোনো সমষ্টি নাই।

খ) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ অসীম ধারাটির

১ম আংশিক সমষ্টি $S_1 = 1$

৩য় আংশিক সমষ্টি $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$

২য় আংশিক সমষ্টি $S_2 = 1 - 1 = 0$

৪র্থ আংশিক সমষ্টি $S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

উপরের উদাহরণ থেকে দেখা যায় যে, n বিজোড় সংখ্যা হলে n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 1$ এবং n জোড় সংখ্যা হলে n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = 0$।

তাহলে দেখা যাচ্ছে যে, প্রদত্ত ধারাটির ক্ষেত্রে, এমন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা পাওয়া যায় না যাকে ধারাটির সমষ্টি বলা যায়।

অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি (Sum of Infinite Geometric Series)

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r।

সুতরাং, ধারাটির n তম পদ = ar^{n-1}, যেখানে $n \in N$।

এবার, $r \neq 1$ হলে ধারাটির n তম আংশিক সমষ্টি

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$$

$$S_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{যখন } r > 1 \text{ এবং } S_n = a \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}, \quad \text{যখন } r < 1$$

লক্ষ করি:

ক) $|r| < 1$ হলে, অর্থাৎ, $-1 < r < 1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে ($n \to \infty$ হলে) $|r^n|$ এর মান হ্রাস পায় এবং n এর মান যথেষ্ট বড় করলে $|r^n|$ এর মান 0 এর কাছাকাছি হয়। অর্থাৎ $|r^n|$ এর প্রান্তীয় মান (Limiting Value) 0 হয়।

ফলে S_n এর প্রান্তীয় মান $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r} - \dfrac{ar^n}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$

এক্ষেত্রে, অসীম ধারাটির সমষ্টি $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$

খ) $|r| > 1$ হলে, অর্থাৎ $r > 1$ অথবা $r < -1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে $|r^n|$ এর মান বৃদ্ধি পায় এবং n কে যথেষ্ট বড় করে $|r^n|$ এর মান যথেষ্ট বড় করা যায়। সুতরাং এমন কোন নির্দিষ্ট সংখ্যা S পাওয়া যায় না, যাকে S_n এর প্রান্তীয় মান ধরা যায়।

অর্থাৎ, এক্ষেত্রে অসীম ধারাটির কোনো সমষ্টি নাই।

গ) $r = -1$ হলে, S_n এর প্রান্তীয় মান পাওয়া যায় না। কেননা, n জোড় সংখ্যা হলে $(-1)^n = 1$ এবং n বিজোড় সংখ্যা হলে $(-1)^n = -1$। এক্ষেত্রে ধারাটি হবে, $a - a + a - a + a - a + \ldots$।

সুতরাং, এই অসীম ধারাটির কোনো সমষ্টি নাই।

ঘ) $r = 1$ হলেও S_n এর প্রান্তীয় মান পাওয়া যায় না। কেননা তখন ধারাটি হবে $a + a + a + a + \ldots$ (n সংখ্যক)। অর্থাৎ $S_n = na$ যা n এর মান বাড়িয়ে যথেষ্ট বড় করা যায়।

সুতরাং, এই অসীম ধারাটির কোন সমষ্টি নাই।

$|r| < 1$ অর্থাৎ, $-1 < r < 1$ হলে, $a + ar + ar^2 + \ldots$ অসীম গুণোত্তর ধারাটির সমষ্টি $S = \dfrac{a}{1-r}$। r এর অন্য সকল মানের জন্য অসীম ধারাটির সমষ্টি থাকবে না।

মন্তব্য: অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টিকে (যদি থাকে) S_∞ লিখে প্রকাশ করা হয় এবং একে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি বলা হয়। অর্থাৎ, $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$, যখন $|r| < 1$।

কাজ:

ক) নিচের প্রত্যেক ক্ষেত্রে একটি অসীম গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r দেওয়া আছে। ধারাটি লিখ এবং যদি এর অসীমতক সমষ্টি থাকে তাহাও নির্ণয় কর:

(১) $a = 4, r = \frac{1}{2}$ (২) $a = 2, r = -\frac{1}{3}$ (৩) $a = \frac{1}{3}, r = 3$

(৪) $a = 5, r = \frac{1}{10^2}$ (৫) $a = 1, r = -\frac{2}{7}$ (৬) $a = 81, r = -\frac{1}{3}$

খ) তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অসীম গুণোত্তর ধারা লিখ।

উদাহরণ ২. নিচের অসীম গুণোত্তর ধারার অসীমতক সমষ্টি (যদি থাকে) নির্ণয় কর।

ক) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots$

খ) $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + \dots$

গ) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} + \dots$

সমাধান:

ক) এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3}$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{3^2} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{3} < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

খ) এখানে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{0.1}{1} = \frac{1}{10} < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$

গ) এখানে, ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 3.414$ (আসন্ন)

পৌনঃপুনিক দশমিকের সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর

উদাহরণ ৩. নিম্নের পৌনঃপুনিক দশমিক সংখ্যাসমূহকে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর কর:

ক) $0.\dot{5}$ খ) $0.\dot{1}\dot{2}$ গ) $1.\dot{2}3\dot{1}$

সমাধান:

ক) $0.\dot{5} = 0.555\ldots = 0.5 + 0.05 + 0.005 + \ldots$

এই অসীম গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ $a = 0.5$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{0.05}{0.5} = 0.1$

$$\therefore 0.\dot{5} = \frac{a}{1-r} = \frac{0.5}{1-(0.1)} = \frac{0.5}{0.9} = \frac{5}{9}$$

খ) $0.\dot{1}\dot{2} = 0.12121212\ldots = 0.12 + 0.0012 + 0.000012 + \ldots$

এই অসীম গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ $a = 0.12$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{0.0012}{0.12} = 0.01$

$$\therefore 0.\dot{1}\dot{2} = \frac{a}{1-r} = \frac{0.12}{1-(0.01)} = \frac{0.12}{0.99} = \frac{4}{33}$$

গ) $1.\dot{2}3\dot{1} = 1.231231231\ldots = 1 + (0.231 + 0.000231 + 0.000000231 + \ldots)$

এখানে, বন্ধনীর ভিতরের অংশটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

আর সেই গুণোত্তর ধারার ১ম পদ $a = 0.231$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{0.000231}{0.231} = 0.001$

$$\therefore 1.\dot{2}3\dot{1} = 1 + \frac{a}{1-r} = 1 + \frac{0.231}{1-(0.001)} = 1 + \frac{231}{999} = \frac{410}{333}$$

উদাহরণ ৪. $\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{(2x+1)^2} + \dfrac{1}{(2x+1)^3} + \ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ক) $x = 1$ হলে, ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

খ) $x = \dfrac{3}{2}$ হলে, ধারাটির পঞ্চম পদ এবং প্রথম 10 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে, $\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{(2x+1)^2} + \dfrac{1}{(2x+1)^3} + \ldots$ একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

$x = 1$ হলে, ধারাটি $= \dfrac{1}{2\cdot 1+1} + \dfrac{1}{(2\cdot 1+1)^2} + \dfrac{1}{(2\cdot 1+1)^3} + \ldots$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$$

ধারাটির সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{\frac{1}{3^2}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$

খ) দেওয়া আছে, $\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{(2x+1)^2}+\dfrac{1}{(2x+1)^3}+\dots$

$x=\dfrac{3}{2}$ হলে, ধারাটি $=\dfrac{1}{2\cdot\frac{3}{2}+1}+\dfrac{1}{(2\cdot\frac{3}{2}+1)^2}+\dfrac{1}{(2\cdot\frac{3}{2}+1)^3}+\dots$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{4^3}+\dots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a=\dfrac{1}{4}$; সাধারণ অনুপাত, $r=\dfrac{\frac{1}{4^2}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{4}<1$

$\therefore$ ধারাটির পঞ্চম পদ = $ar^{5-1}=\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{5-1}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{5}=\dfrac{1}{4^5}$

ধারাটির প্রথম দশ পদের সমষ্টি $=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $\quad[n=10]$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^{10}}\right)}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{4^{10}}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^{10}}\right)$$

গ) ধারাটির প্রথম পদ, $a=\dfrac{1}{2x+1}$, সাধারণ অনুপাত, $r=\dfrac{\frac{1}{(2x+1)^2}}{\frac{1}{2x+1}}=\dfrac{1}{2x+1}$

এখানে, $\dfrac{1}{2x+1}\neq 0$, অতএব, $\dfrac{1}{2x+1}>0$ অথবা $\dfrac{1}{2x+1}<0\cdots(1)$

এবার ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি, $|r|<1$ অর্থাৎ $\left|\dfrac{1}{2x+1}\right|<1$ হয় $\cdots(2)$

যখন উপরের (1) এর শর্ত $\dfrac{1}{2x+1}>0$ সত্য অর্থাৎ $2x+1>0$ [গুণোত্তর বিপরীতের চিহ্ন একই] তখন (2) এ সেটা বসিয়ে পাই $\dfrac{1}{2x+1}<1$

এবার উভয় পক্ষে ধনাত্মক সংখ্যা $2x+1$ দিয়ে গুণ করলে অসমতার চিহ্ন একই থাকবে

অর্থাৎ $1<2x+1$, বা, $1-1<2x$, বা, $0<2x$, বা, $2x>0$ বা, $x>0$

যখন উপরের (1) এর শর্ত $\dfrac{1}{2x+1}<0$ সত্য অর্থাৎ $2x+1<0$ [গুণোত্তর বিপরীতের চিহ্ন একই] তখন (2) এ সেটা বসিয়ে পাই $-\dfrac{1}{2x+1}<1$

এবার উভয় পক্ষে ঋণাত্মক সংখ্যা $2x+1$ দিয়ে গুণ করলে অসমতার চিহ্ন বদলে যাবে

অর্থাৎ $-1 > 2x+1$, বা, $-1-1 > 2x$, বা, $-2 > 2x$, বা, $-1 > x$, বা, $x < -1$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত $x < -1$ অথবা, $x > 0$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S_\infty = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{\dfrac{1}{2x+1}}{1-\dfrac{1}{2x+1}}$

লব ও হরকে $(2x+1)$ দ্বারা গুণ করে, $S_\infty = \dfrac{1}{2x+1-1} = \dfrac{1}{2x}$

অনুশীলনী ৭

১. $1, 3, 5, 7, \ldots$ অনুক্রমটির 12 তম পদ কোনটি?

ক) 12 খ) 13 গ) 23 ঘ) 25

২. কোনো একটি অনুক্রমের n তম পদ $= \dfrac{1}{n(n+1)}$ হলে এর তৃতীয় পদ কোনটি?

ক) $\dfrac{1}{3}$ খ) $\dfrac{1}{6}$ গ) $\dfrac{1}{12}$ ঘ) $\dfrac{1}{20}$

৩. কোনো একটি অনুক্রমের n তম পদ $= \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ হলে 20 তম পদ কোনটি?

ক) 0 খ) 1 গ) -1 ঘ) 2

৪. কোনো একটি অনুক্রমের n তম পদ $u_n = \dfrac{1}{n}$ এবং $u_n < 10^{-4}$ হলে n এর মান হবে

(i) $n < 10^3$ (ii) $n < 10^4$ (iii) $n > 10^4$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) iii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii, iii

৫. কোনো একটি অনুক্রমের n তম পদ $u_n = 1-(-1)^n$ হলে, এর

(i) 10 তম পদ 0

(ii) 15 তম পদ 2

(iii) প্রথম 12 পদের সমষ্টি 12

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii, iii

পার্শ্বের ধারাটি লক্ষ কর এবং (৬-৮) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও। $4 + \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{9} + \ldots$

৬. ধারাটির 10 তম পদ কোনটি?

ক) $\frac{4}{3^{10}}$ খ) $\frac{4}{3^{9}}$ গ) $\frac{4}{3^{11}}$ ঘ) $\frac{4}{3^{12}}$

৭. ধারাটির ১ম 5 পদের সমষ্টি কত?

ক) $\frac{160}{27}$ খ) $\frac{484}{81}$ গ) $\frac{12}{9}$ ঘ) $\frac{20}{9}$

৮. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?

ক) 0 খ) 5 গ) 6 ঘ) 7

৯. প্রদত্ত অনুক্রমের 10 তম পদ, 15 তম পদ এবং r তম পদ নির্ণয় কর:

ক) $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$

খ) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$

গ) অনুক্রমটির n তম পদ $= \frac{1}{n(n+1)}, n \in N$

ঘ) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

ঙ) $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \dots$

চ) অনুক্রমটির n তম পদ $= \frac{1-(-1)^{3n}}{2}$

১০. একটি অনুক্রমের n তম পদ $u_n = \frac{1}{n}$

ক) $u_n < 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?

খ) $u_n > 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?

গ) u_n এর প্রান্তীয় মান (n যথেষ্ট বড় হলে) সম্পর্কে কী বলা যায়?

১১. প্রদত্ত অসীম গুণোত্তর ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে, তবে তা নির্ণয় কর:

ক) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

খ) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3} - \frac{8}{5^4} + \dots$

গ) $8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots$

ঘ) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$

ঙ) $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{16}\right) + \dots$

১২. নিচের ধারাগুলোর প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর:

ক) $7 + 77 + 777 + \dots$

খ) $5 + 55 + 555 + \ldots$

১৩. x-এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \ldots$ অসীম ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৪. প্রদত্ত পৌনঃপুনিক দশমিকগুলোকে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

ক) $0.\dot{2}\dot{7}$ খ) $2.\dot{3}0\dot{5}$ গ) $0.0\dot{1}2\dot{3}$ ঘ) $3.0\dot{4}0\dot{3}$

১৫. $a + ab + ab^2 + \ldots$ একটি গুণোত্তর ধারা।

ক) ধারাটির সপ্তম পদ নির্ণয় কর।

খ) $a = 1$ এবং $b = \frac{1}{2}$ হলে, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি যদি থাকে তবে তা নির্ণয় কর।

গ) a এর স্থলে 3, ab এর স্থলে 33 এবং ab^2 এর স্থলে 333 বসালে যে ধারা পাওয়া যায় তার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৬. একটি গুণোত্তর ধারার তিনটি ক্রমিক পদের সমষ্টি $24\frac{4}{5}$ এবং গুণফল 64।

ক) উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ গঠন কর।

খ) ধারাটির প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

গ) সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{5}$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৭. চারটি কুকুর এক কিলোমিটার বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের চার কোণায় দাঁড়িয়ে আছে। এবার প্রতিটি কুকুর একই বেগে সরাসরি ডানের কুকুরের দিকে চোখ বন্ধ করে অর্ধেক দূরত্ব অতিক্রম করে। চোখ খুলেই আবার ডানে অবস্থিত কুকুরের দিকে একইভাবে অর্ধেক দূরত্ব দৌড়ায়।

ক) এভাবে দৌড়াতে থাকলে পরিশেষে কুকুরগুলোর অবস্থান কী হবে? তারা প্রত্যেকে কত দূরত্বই বা অতিক্রম করবে?

খ) অর্ধেক দূরত্ব পর দিক পরিবর্তন না করে যদি k ভাগের একভাগ অতিক্রম করে দিক পরিবর্তন করে তাহলে উপরের প্রশ্নের উত্তর দাও।

গ) ক্ষেত্রটি বর্গক্ষেত্র না হয়ে যদি সমবাহু ত্রিভুজ হতো তাহলে উপরের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

অধ্যায় ৮

ত্রিকোণমিতি (Trigonometry)

ত্রিকোণমিতি শব্দটি বিশ্লেষণ করলে পাওয়া যায় 'ত্রিকোণ' এবং 'মিতি'। ত্রিকোণ বলতে তিনটি কোণ এবং মিতি বলতে পরিমাপ বুঝায়। ইংরেজিতে ত্রিকোণমিতিকে 'Trigonometry' লেখা হয়। এটি বিশ্লেষণেও পাওয়া যায় 'Trigon' এবং 'Metry'। 'Trigon' গ্রিক শব্দ দ্বারা তিনটি কোণ যা ত্রিভুজ এবং 'Metry' দ্বারা পরিমাপ বুঝায়। সাধারণভাবে **ত্রিকোণমিতি** বলতে তিনটি কোণের পরিমাপ বুঝায়। ব্যবহারিক প্রয়োজনে ত্রিভুজের তিনটি কোণ ও তিনটি বাহুর পরিমাপ এবং এদের সাথে সম্পর্কিত বিষয়ের আলোচনা থেকেই ত্রিকোণমিতির সূত্রপাত হয়। যেমন, একটি গাছের ছায়ার সাহায্যে গাছটির উচ্চতা, নদীর একপারে দাঁড়িয়ে নদীর বিস্তার নির্ণয়, কোণাকার জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয় ইত্যাদি ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতির ব্যবহার অতিপ্রাচীন ও জনপ্রিয়। এ ছাড়া, গণিতের বা বিজ্ঞানের প্রতিটি শাখায় ত্রিকোণমিতির ব্যাপক ব্যবহার রয়েছে। তাই ত্রিকোণমিতির আলোচনা গণিতের একটি অতীব গুরুত্বপূর্ণ বিষয় হিসেবে সুপ্রতিষ্ঠিত। ত্রিকোণমিতির আলোচনা দুইটি শাখায় বিভক্ত। একটি **সমতলীয় ত্রিকোণমিতি** (Plane Trigonometry) এবং অন্যটি **গোলকীয় ত্রিকোণমিতি** (Spherical Trigonometry)। বর্তমান আলোচনা শুধুমাত্র সমতলীয় ত্রিকোণমিতির মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে।

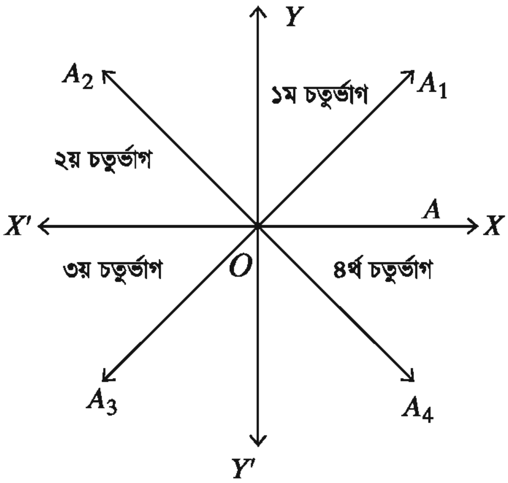
এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা -

- রেডিয়ান পরিমাপের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- রেডিয়ান পরিমাপ ও ডিগ্রি পরিমাপের পারস্পরিক সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারবে।
- চারটি চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের চিহ্ন নির্দেশ করতে পারবে।
- অনূর্ধ্ব 2π কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবে।
- $-\theta$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করতে পারবে।
- পূর্ণসংখ্যা $n \leq 4$ এর জন্য $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- সহজ ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান করতে পারবে।

জ্যামিতিক কোণ ও ত্রিকোণমিতিক কোণ

জ্যামিতিক কোণ এবং ত্রিকোণমিতিক কোণের আলোচনার সুবিধার্থে আমরা XY সমতলে পরস্পর সমকোণে ছেদ করে এরূপ একজোড়া সরলরেখা XOX' এবং YOY' অঙ্কন করি। নিচের চিত্রে

রেখাদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করায় যে চারটি সমকোণ উৎপন্ন হয়েছে তাদের প্রত্যেকটির অভ্যন্তরকে একটি **চতুর্ভাগ (Quadrant)** বলা হয়। OX রেখা থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরতে থাকলে প্রথম সমকোণের ($\angle XOY$ এক সমকোণ) অভ্যন্তরকে **প্রথম চতুর্ভাগ (First quadrant)** এবং একইভাবে ঘুরতে থাকলে দ্বিতীয় ($\angle YOX'$), তৃতীয় ($\angle X'OY'$) এবং চতুর্থ ($\angle XOY'$) সমকোণের অভ্যন্তরসমূহকে যথাক্রমে **দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ** বলা হয় (নিচের চিত্র)।



জ্যামিতিক ধারণা অনুসারে দুইটি ভিন্ন রশ্মি একটি বিন্দুতে মিলিত হলে ঐ বিন্দুতে একটি কোণ উৎপন্ন হয়েছে বলে ধরা হয়। কিন্তু ত্রিকোণমিতিতে একটি স্থির রশ্মির সাপেক্ষে অপর একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মির বিভিন্ন অবস্থানে বিভিন্ন কোণ বিবেচনা করা হয়। মনে করি, OA একটি ঘূর্ণায়মান রশ্মি এবং এটি শুরুতে OX স্থির রশ্মির অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে তার বিপরীত (anticlockwise) দিকে ঘুরছে। OA রশ্মি প্রথমে OA_1 অবস্থানে এসে $\angle XOA_1$ সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে এবং প্রথম চতুর্ভাগে থাকে এবং পরে যখন OX এর সাথে লম্বভাবে OY অবস্থানে আসে তখন $\angle XOY$ কোণের পরিমাপ $90°$ বা এক সমকোণ হয়। OA রশ্মিটি একই দিকে আরও কিছু ঘুরে যখন OA_2 অবস্থানে আসে তখন $\angle XOA_2$ কোণটি স্থূলকোণ। একইভাবে ঘুরে যখন OA রশ্মি OX এর ঠিক বিপরীত দিকে OX' অবস্থানে থাকে, তখন উৎপন্ন কোণ $\angle XOX'$ একটি সরলকোণ বা দুই সমকোণ। OA রশ্মি যখন সম্পূর্ণরূপে ঘুরে ঠিক আগের অবস্থানে আসে অর্থাৎ OX এর সাথে মিলিত হয় তখন মোট উৎপন্ন কোণের পরিমাণ দুই সরলকোণ বা চার সমকোণ হয়।

জ্যামিতিতে কোণের আলোচনা দুই সরলকোণ পর্যন্ত সীমিত রাখা হয় এবং এরূপ জ্যামিতিক ও ত্রিকোণমিতিক কোণের মধ্যে কোনো পার্থক্য নাই। কিন্তু যদি মনে করা হয় যে, OA রশ্মিটি সম্পুর্ণরূপে একবার ঘুরার পর আরও কিছু বেশি ঘুরে OA_1 অবস্থানে গেল, তখন উৎপন্ন XOA_1 কোণের পরিমাণ চার সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর। এরূপ ঘূর্ণনের ফলে ত্রিকোণমিতিতে আরও বৃহত্তর কোণ উৎপন্ন হতে পারে। কিন্তু সমতল জ্যামিতিতে চার সমকোণের চেয়ে বেশি ধারণা করা যায় না। OA রশ্মির আদি অবস্থান $\angle XOX$ কোণকে জ্যামিতিতে কোণ বলে গণ্য করা হয় না, কিন্তু ত্রিকোণমিতিতে $\angle XOX$ কোণের পরিমাণ শূন্য ধরা হয়।

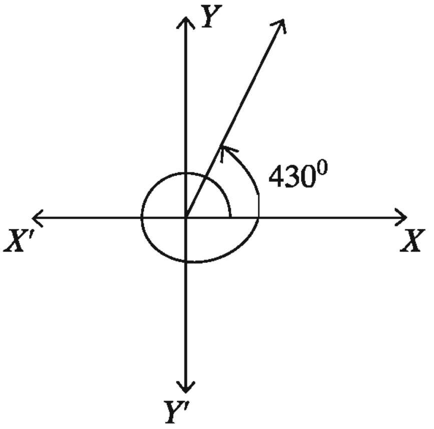
ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ

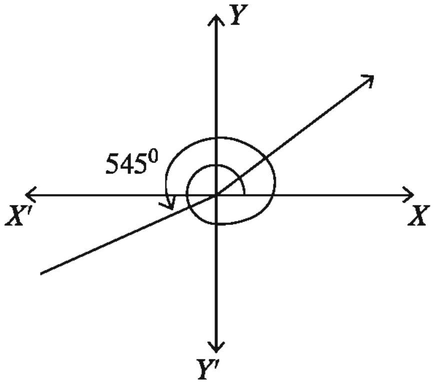
উপরের আলোচনায় আমরা OA রশ্মিকে (উপরের চিত্রে) ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরিয়েছি এবং OA রশ্মি দ্বারা বিভিন্ন চতুর্ভাগে উৎপন্ন কোণসমূহকে ধনাত্মক কোণ হিসাবে বিবেচনা করেছি। সুতরাং কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (anticlockwise) ঘুরালে উৎপন্ন কোণকে **ধনাত্মক (positive) কোণ** বলা হয় এবং কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে (clockwise) ঘুরালে উৎপন্ন কোণকে **ঋণাত্মক (negative) কোণ** বলা হয়।

তাই, উপরের আলোচনা থেকে বলা যায় একটি ধনাত্মক কোণের পরিমাপ 90° অপেক্ষা কম হলে ১ম চতুর্ভাগে থাকবে। আবার 360° ও 450° এর মধ্যে থাকলেও কোণটি ১ম চতুর্ভাগেই থাকবে। একইভাবে কোনো ধনাত্মক কোণের মান 180° ও 270° এর মধ্যে থাকলে কোণটি ৩য় চতুর্ভাগে, 90° থেকে 180° এর মধ্যে থাকলে ২য় চতুর্ভাগে এবং 270° ও 360° এর মধ্যে থাকলে ৪র্থ চতুর্ভাগে থাকে। অনুরূপভাবে একটি ঋণাত্মক কোণের পরিমাপ -90° থেকে 0° এর মধ্যে থাকলে ৪র্থ চতুর্ভাগে, -180 থেকে -90° এর মধ্যে ৩য় চতুর্ভাগে, -270° থেকে -180° এর মধ্যে ২য় চতুর্ভাগে ও -360° থেকে -270° এর মধ্যে হলে ১ম চতুর্ভাগে থাকবে। 180° ও 360° বা এর যেকোনো পূর্ণসাংখ্যিক গুণিতক XOX' রেখার এবং 90° ও 270° বা এদের যেকোনো পূর্ণসাংখ্যিক বিজোড় গুণিতক YOY' রেখার (উপরের চিত্রে) উপর অবস্থান করবে। $\angle AOA_1$ ১ম চতুর্ভাগে, $\angle AOA_2$ ২য় চতুর্ভাগে, $\angle AOA_3$ ৩য় চতুর্ভাগে এবং $\angle AOA_4$ ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

উদাহরণ ১. ক) 430° ও খ) 545° কোণদ্বয়ের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে নির্ণয় কর।

ক) $430^\circ = 360^\circ + 70^\circ = 4 \times 90^\circ + 70^\circ$। 430° কোণটি ধনাত্মক কোণ এবং 4 সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু 5 সমকোণ অপেক্ষা ছোট। সুতরাং 430° কোণটি উৎপন্ন করার জন্য কোনো রশ্মিকে 4 সমকোণ বা একবার সম্পূর্ণ ঘুরার পর আরও 70° ঘুরতে হয়েছে (নিচের বামের চিত্র)। তাই 430° কোণটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

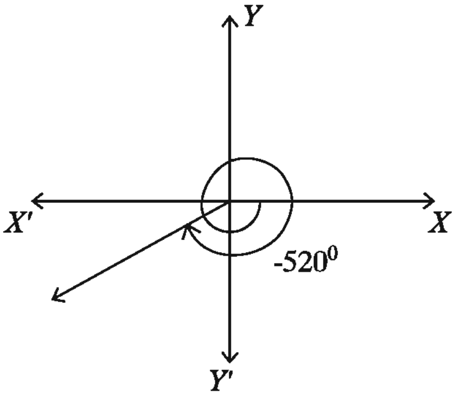


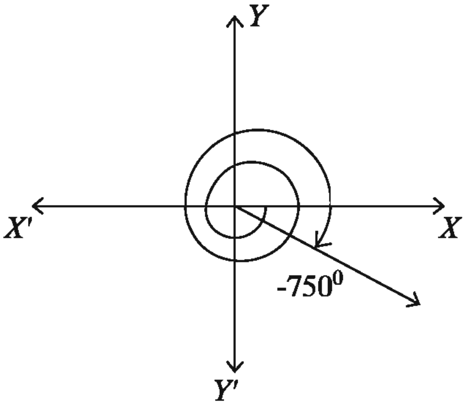


খ) $545^\circ = 540^\circ + 5^\circ = 6 \times 90^\circ + 5^\circ$। 545° কোণটি ধনাত্মক এবং 6 সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু 7 সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। 545° কোণটি উৎপন্ন করতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে কোনো রশ্মিকে 6 সমকোণের চেয়ে 5° বেশি বা একবার সম্পূর্ণ ঘুরে আদি অবস্থানে আসার পর আরও দুই সমকোণের চেয়ে 5° বেশি ঘুরতে হয়েছে (উপরের ডানের চিত্র)। তাই 545° কোণটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

কাজ: 330°, 535°, 777° ও 1045° কোণসমূহ কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করে তা চিত্রসহ দেখাও।

উদাহরণ ২. ক) -520° ও খ) -750° কোণদ্বয় কোন চতুর্ভাগে আছে নির্ণয় কর।





ক) $-520^\circ = -450^\circ - 70^\circ = -5 \times 90^\circ - 70^\circ$। -520° একটি ঋণাত্মক কোণ এবং -520° কোণটি উৎপন্ন করতে কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে একবার সম্পূর্ণ ঘুরে একই দিকে আরো এক সমকোণ বা 90° এবং 70° ঘুরে তৃতীয় চতুর্ভাগে আসতে হয়েছে (উপরের বামের চিত্র)। সুতরাং, -540° কোণটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করছে।

খ) $-750^\circ = -720^\circ - 30^\circ = -8 \times 90^\circ - 30^\circ$। -750° কোণটি ঋণাত্মক কোণ এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে দুইবার সম্পূর্ণ (8 সমকোণ) ঘুরার পর একই দিকে আরও 30° ঘুরতে হয়েছে (উপরের ডানের চিত্র)। সূতরাং -750° কোণটির অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে।

কাজ: -100°, -365°, -720° ও 1320° কোণসমূহ কোন চতুর্ভাগে আছে, চিত্রসহ নির্ণয় কর।

কোণ পরিমাপের একক

কোনো কোণের পরিমাণ নির্ণয়ে সাধারণত দুই প্রকার পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়:

ক) ষাটমূলক পদ্ধতি (Sexagesimal System) ও

খ) বৃত্তীয় পদ্ধতি (Circular System)

ষাটমূলক পদ্ধতি: ষাটমূলক পদ্ধতিতে সমকোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়। এই পদ্ধতিতে এক সমকোণকে সমান 90 ভাগে বিভক্ত করে প্রতি ভাগকে এক ডিগ্রী (1° = one degree) ধরা হয়।

এক ডিগ্রিকে সমান 60 ভাগ করে প্রতিভাগকে এক মিনিট ($1'$ = one minute) এবং এক মিনিটকে সমান 60 ভাগ করে প্রতি ভাগকে এক সেকেন্ড ($1''$= one second) ধরা হয়।

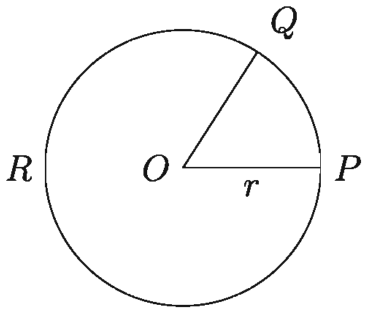
অর্থাৎ, $60''$ (সেকেন্ড) $= 1'$ (মিনিট)

$60'$ (মিনিট) $= 1^\circ$ (ডিগ্রি)

90° (ডিগ্রি)= 1 সমকোণ

বৃত্তীয় পদ্ধতি সম্পর্কে জানার পূর্বে রেডিয়ান সম্পর্কে জানা দরকার।

রেডিয়ান: কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে এক রেডিয়ান বলে।

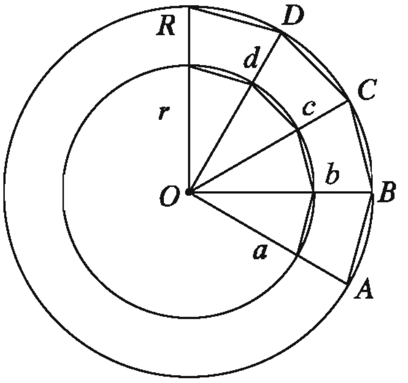


চিত্রে PQR বৃত্তের কেন্দ্র O, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $OP = r$ এবং ব্যাসার্ধের সমান চাপ PQ। PQ চাপ কেন্দ্র O তে $\angle POQ$ উৎপন্ন করেছে। উক্ত কোণের পরিমাণই এক রেডিয়ান। অর্থাৎ $\angle POQ$ এক রেডিয়ান।

বৃত্তীয় পদ্ধতি: বৃত্তীয় পদ্ধতিতে এক রেডিয়ান (radian) কোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়। কোণের ডিগ্রী পরিমাপ ও রেডিয়ান পরিমাপের সম্পর্ক নির্ণয়ের জন্য নিম্নোক্ত প্রতিজ্ঞাসমূহ এবং কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ সম্পর্কে জানা প্রয়োজন।

প্রতিজ্ঞা ১. যেকোনো দুইটি বৃত্তের স্ব-স্ব পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সমান।

প্রমাণ: মনে করি, প্রদত্ত বৃত্ত দুইটি সমকেন্দ্রিক এবং উভয়ের কেন্দ্র O। বৃহত্তর বৃত্তটির পরিধি P ও ব্যাসার্ধ R এবং ক্ষুদ্রতর বৃত্তটির পরিধি p ও ব্যাসার্ধ r (নিচের চিত্র)। এখন বৃহত্তর বৃত্তটিকে n সংখ্যক $(n > 1)$ সমান ভাগে বিভক্ত করি। কেন্দ্রের সাথে বিভক্ত বিন্দুগুলো যোগ করলে ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিও n সংখ্যক সমান ভাগে বিভক্ত হবে। উভয় বৃত্তে বিভক্ত বিন্দুগুলো পরস্পর সংযুক্ত করি। ফলে প্রত্যেক বৃত্তে n সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম বহুভুজ অন্তর্লিখিত হল (বৃহত্তর বৃত্তে $ABCD\ldots$ ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তে $abcd\ldots$).



এখন $\triangle OAB$ এবং $\triangle Oab$ সদৃশ, কারণ, $\angle AOB$ এবং $\angle aOb$ [সাধারণ কোণ] এবং উভয় ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু বলে বাহু সংলগ্ন কোণগুলো সমান।

$$\therefore \frac{AB}{ab} = \frac{OA}{Oa} = \frac{OB}{Ob} = \frac{R}{r}$$

অনুরূপভাবে,

$\frac{BC}{bc} = \frac{R}{r}, \frac{CD}{cd} = \frac{R}{r}$ ইত্যাদি।

$$\therefore \frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \cdots = \frac{R}{r}$$

$$\therefore \frac{AB+BC+CD+\dots}{ab+bc+cd+\dots} = \frac{R+R+R+\dots}{r+r+r+\dots} = \frac{nR}{nr} = \frac{R}{r} = \frac{2R}{2r} \cdots (1)$$

n যদি যথেষ্ট বড় হয় $(n \to \infty)$ তাহলে $AB, BC, CD, \dots$ রেখাংশসমূহ অত্যন্ত ক্ষুদ্র হবে এবং মনে হবে সবাই বৃত্তের ছোট ছোট চাপ।

সুতরাং এক্ষেত্রে, $AB + BC + CD + \cdots \approx$ বৃহত্তর বৃত্তের পরিধি P এবং

$ab + bc + cd + \cdots \approx$ ক্ষুদ্রতর বৃত্তের পরিধি p

$\therefore$ সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$\frac{P}{p} = \frac{2R}{2r}$$

অর্থাৎ, $\frac{P}{2R} = \frac{p}{2r}$

অর্থাৎ, $\frac{\text{বৃহত্তর বৃত্তের পরিধি}}{\text{বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাস}} = \frac{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের পরিধি}}{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাস}}$

$\therefore$ যেকোনো দুইটি বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সমান।

প্রতিজ্ঞা ১ এর আলোকে মন্তব্য ও অনুসিদ্ধান্ত:

মন্তব্য: যেকোনো বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সবসময় সমান ও একই ধ্রুব সংখ্যা। এ ধ্রুব সংখ্যাটিকে গ্রিক বর্ণ π (পাই) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। π একটি অমূলদ সংখ্যা এবং দশমিকে প্রকাশ করলে এটি একটি অসীম দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা $(\pi = 3.1415926535897932\dots)$.

মন্তব্য: সাধারণত চার দশমিক স্থান পর্যন্ত π এর আসন্ন মান $\pi = 3.1416$ ব্যবহার করা হয়। কম্পিউটারের সাহায্যে π এর মান এক লক্ষ কোটি দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণীত হয়েছে। যেহেতু π এর আসন্ন মান ব্যবহার করা হয় সেহেতু উত্তরও হবে আসন্ন। তাই উত্তরের পাশে 'প্রায়' লেখা অবশ্য কর্তব্য। পরবর্তী সমস্ত কাজে অন্য কোনোরূপ বলা না থাকলে চার দশমিক স্থান পর্যন্ত π এর আসন্ন

মান 3.1416 ব্যবহার করা হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২. বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে, পরিধি হবে $2\pi r$.

প্রমাণ: প্রতিজ্ঞা ১ এর আলোকে আমরা জানি,

$$\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}} = \pi$$

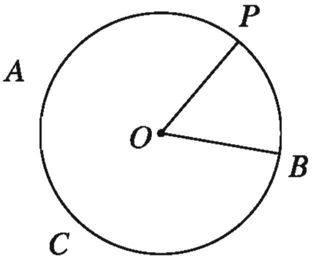
$$\begin{aligned} \text{বা, পরিধি} &= \pi \times \text{ ব্যাস} \\ &= \pi \times 2r \; [\text{ব্যাস} = 2r] \\ &= 2\pi r \end{aligned}$$

$\therefore$ r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট যেকোনো বৃত্তের পরিধি $2\pi r$.

প্রতিজ্ঞা ৩. বৃত্তের কোনো চাপের উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

মনে করি, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OB। P বৃত্তের উপর অন্য একটি বিন্দু। ফলে BP বৃত্তের একটি চাপ এবং $\angle POB$ বৃত্তের একটি কেন্দ্রস্থ কোণ। তাহলে, কেন্দ্রস্থ $\angle POB$, চাপ BP এর সমানুপাতিক হবে।

অর্থাৎ, কেন্দ্রস্থ $\angle POB \propto$ চাপ BP.



প্রতিজ্ঞা ৪. রেডিয়ান কোণ একটি ধ্রুব কোণ।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে $\angle POB$ এক রেডিয়ান কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle POB$ একটি ধ্রুব কোণ।

অঙ্কন: OB রেখাংশের (ব্যাসার্ধের) উপর OA লম্ব আঁকি।

প্রমাণ:

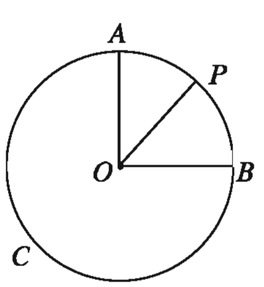
OA লম্ব বৃত্তের পরিধিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

চাপ $AB =$ পরিধির এক-চতুর্থাংশ $= \dfrac{1}{4} \times 2\pi r = \dfrac{\pi r}{2}$

এবং চাপ $PB =$ ব্যাসার্ধ r [$\angle POB = 1$ রেডিয়ান]

প্রতিজ্ঞা ৩ থেকে পাই,

$$\frac{\angle POB}{\angle AOB} = \frac{\text{চাপ } PB}{\text{চাপ } AB}$$



$\therefore \angle POB = \dfrac{\text{চাপ } PB}{\text{চাপ } AB} \times \angle AOB = \dfrac{r}{\frac{\pi r}{2}} \times$ এক সমকোণ [OA ব্যাসার্ধ এবং OB এর উপর লম্ব]

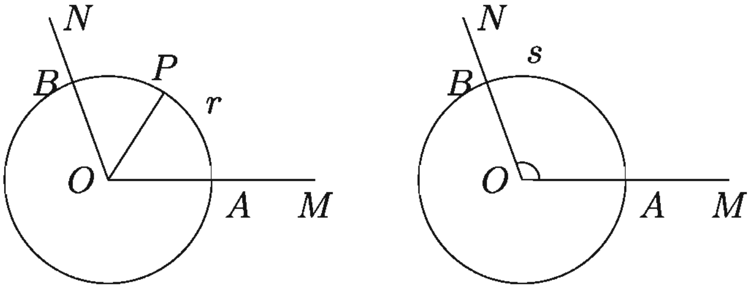
$= \frac{2}{\pi}$ সমকোণ।

যেহেতু সমকোণ ও π ধ্রুবক সেহেতু $\angle POB$ একটি ধ্রুব কোণ।

কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ

সংজ্ঞা ১. বৃত্তীয় পদ্ধতিতে (circular system) অর্থাৎ, রেডিয়ান এককে কোনো কোণের পরিমাপকে তার বৃত্তীয় পরিমাপ (circular measure) বলা হয়।

মনে করি, $\angle MON$ যেকোনো একটি কোণ যার বৃত্তীয় পরিমাপ নির্ণয় করতে হবে। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে $OA = r$ ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। বৃত্তটি OM ও ON কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে AB চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB$। ব্যাসার্ধ r এর সমান করে AP চাপ নিই (চাপ ও ব্যাসার্ধ একই এককে হতে হবে)।



তাহলে, $\angle AOP = 1$ রেডিয়ান।

ধরি চাপ $AB = s$।

প্রতিজ্ঞা ৩ অনুযায়ী,

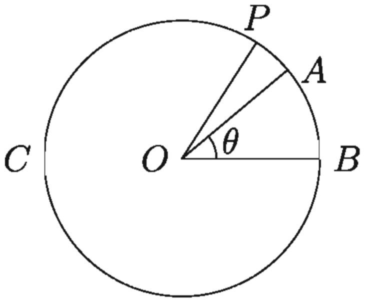
$$\frac{\angle MON}{\angle AOP} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AP} = \frac{\text{চাপ } AB}{\text{ব্যাসার্ধ } OA} = \frac{s}{r}$$

$$\therefore \angle MON = \frac{s}{r} \times \angle AOP$$

$$= \frac{s}{r} \times 1 \text{ রেডিয়ান} = \frac{s}{r} \text{ রেডিয়ান}$$

$\therefore \angle MON$ এর বৃত্তীয় পরিমাপ $\frac{s}{r}$, যেখানে কোণটি তার শীর্ষবিন্দুকে কেন্দ্র করে এবং r ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তে s পরিমাণ চাপ খণ্ডিত করে।

প্রতিজ্ঞা ৫. r ব্যাসার্ধের কোনো বৃত্তে s দৈর্ঘ্যের কোনো চাপ কেন্দ্রে θ পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করলে $s = r\theta$ হবে।



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের ব্যাসার্ধ $OB = r$ একক, চাপ $AB = s$ একক এবং AB চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ $\angle AOB = \theta^c$ । প্রমাণ করতে হবে যে, $s = r\theta$.

অঙ্কন: B বিন্দুকে কেন্দ্র করে OB এর সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট BP চাপ আঁকি যেন তা ABC বৃত্তের পরিধিকে P বিন্দুতে ছেদ করে। O, P যোগ করি।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে $\angle POB = 1^c$

আমরা জানি, কোনো বৃত্তচাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।

$$\frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } PB} = \frac{\angle AOB}{\angle POB}$$

বা, $\dfrac{s \text{ একক}}{r \text{ একক}} = \dfrac{\theta^c}{1^c}$

বা, $\dfrac{s}{r} = \theta$

$\therefore s = r\theta$ (প্রমাণিত)

কোণের ডিগ্রি পরিমাপ ও রেডিয়ান (বৃত্তীয়) পরিমাপের সম্পর্ক

প্রতিজ্ঞা ৪ থেকে আমরা পাই,

1 রেডিয়ান $= \dfrac{2}{\pi}$ সমকোণ

অর্থাৎ, $1^c = \dfrac{2}{\pi}$ সমকোণ। [1 রেডিয়ান = 1^c]

$\therefore$ 1 সমকোণ $= \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^c$

বা, $90^\circ = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^c$

$\therefore 1^\circ = \left(\dfrac{\pi}{180}\right)^c$ এবং $1^c = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$

প্রতিজ্ঞা ৬. $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c$ এবং $1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$

লক্ষণীয়:

(i) $90^\circ = 1$ সমকোণ $= \frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান $= \left(\frac{\pi}{2}\right)^c$

অর্থাৎ, $180^\circ = 2$ সমকোণ $= \pi$ রেডিয়ান $= \pi^c$.

(ii) ষাটমুলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে একটি কোণের পরিমাপ যথাক্রমে D° ও R^c হলে

$$D^\circ = \left(D \times \frac{\pi}{180}\right)^c = R^c$$

অর্থাৎ, $D \times \frac{\pi}{180} = R$

বা, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$.

উপরোক্ত আলোচনা থেকে বহুল ব্যবহৃত কোণসমূহের ডিগ্রি ও রেডিয়ানের সম্পর্ক দেওয়া হলো:

(i) $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c$

(ii) $30^\circ = \left(30 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{6}\right)^c$

(iii) $45^\circ = \left(45 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{4}\right)^c$

(iv) $60^\circ = \left(60 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{3}\right)^c$

(v) $90^\circ = \left(90 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{\pi}{2}\right)^c$

(vi) $180^\circ = \left(180 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \pi^c$

(vii) $360^\circ = \left(360 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = (2\pi)^c$

ব্যবহারিক ক্ষেত্রে রেডিয়ান প্রতীক (c) সাধারণত লিখা হয় না। সংক্ষেপে (রেডিয়ান প্রতীক উহ্য রেখে)

$1^\circ = \frac{\pi}{180}, 30^\circ = \frac{\pi}{6}, 45^\circ = \frac{\pi}{4}, 60^\circ = \frac{\pi}{3}, 90^\circ = \frac{\pi}{2}, 180^\circ = \pi, 360^\circ = 2\pi$ ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য: $1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c = 0.01745^c$ (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 57.29578^\circ$ (আসন্ন পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত) $= 57^\circ 17' 44.81''$.

এক্ষেত্রে π এর আসন্ন মান 3.1416 ব্যবহার করা হয়েছে।

দ্রষ্টব্য: নিচের সমস্ত উদাহরণ এবং সমস্ত সমস্যায় π এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান ($\pi = 3.1416$) পর্যন্ত ব্যবহার করা হবে। π এর আসন্ন মান ব্যবহৃত হলে উত্তরে অবশ্যই 'প্রায়' কথাটি লিখতে হবে।

উদাহরণ ৩. ক) $30°12'36''$ কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। খ) $\frac{3\pi}{13}$ কে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে প্রকাশ কর।

সমাধান:

ক) $30°12'36'' = 30°\left(12\frac{36}{60}\right)' = 30°\left(12\frac{3}{5}\right)' = 30°\left(\frac{63}{5}\right)'$

$= \left(30\frac{63}{5\times 60}\right)^{\circ} = \left(30\frac{21}{100}\right)^{\circ} = \left(\frac{3021}{100}\right)^{\circ}$

$= \frac{3021}{100} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $[\because 1° = \frac{\pi^c}{180}]$

$= \frac{3021\pi}{18000} = .5273$ রেডিয়ান (প্রায়)

$\therefore 30°12'36'' = .5273^c$ (প্রায়)

খ) $\frac{3\pi}{13} = \frac{3\pi}{13} \times \frac{180}{\pi}$ ডিগ্রি $[\because 1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}]$

$= \frac{540}{13}$ ডিগ্রি $= 41°32'18\cdot 46''$.

$\therefore \frac{3\pi}{13}$ রেডিয়ান $= 41°\ 32'\ 18\cdot 46''$

উদাহরণ ৪. একটি ত্রিভুজের তিনটি কোণের অনুপাত $3:4:5$, কোণ তিনটির বৃত্তীয় মান কত?

সমাধান: ধরি, কোণ তিনটি যথাক্রমে $3x^c$, $4x^c$ ও $5x^c$.

প্রশ্নমতে, $3x^c + 4x^c + 5x^c = \pi^c$ [ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ $= \pi^c$]

বা, $12x^c = \pi^c$

বা, $x = \frac{\pi}{12}$

$\therefore$ কোণ তিনটি যথাক্রমে

$3x^c = \left(\frac{3\pi}{12}\right)^c = \left(\frac{\pi}{4}\right)^c = \frac{\pi}{4}$

$4x^c = \left(\frac{4\pi}{12}\right)^c = \left(\frac{\pi}{3}\right)^c = \frac{\pi}{3}$

$$5x^c = \left(\frac{5\pi}{12}\right)^c = \frac{5\pi}{12}$$

নির্ণেয় কোণ তিনটির বৃত্তীয় মান: $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ ও $\frac{5\pi}{12}$

উদাহরণ ৫. একটি চাকা 1.75 কিলোমিটার পথ যেতে 40 বার ঘুরে। চাকাটির ব্যাসার্ধ কত?

সমাধান: ধরি, চাকার ব্যাসার্ধ r মিটার।

$\therefore$ চাকার পরিধি = $2\pi r$ মিটার $[\pi = 3.1416]$

আমরা জানি, চাকাটি একবার ঘুরলে তার পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore$ 40 বার ঘুরায় চাকাটির মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 40 \times 2\pi r$ মি. = $80\pi r$ মিটার

প্রশ্নমতে, $80\pi r = 1750$ [1 কি.মি. $=$ 1000 মিটার]

বা, $r = \frac{1750}{80\pi} = \frac{1750}{80 \times 3.1416}$ মিটার

$= 6.963$ মিটার (প্রায়)।

$\therefore$ চাকার ব্যাসার্ধ 6.963 মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ৬. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। ঢাকা ও জামালপুর পৃথিবীর কেন্দ্রে 2° কোণ উৎপন্ন করলে ঢাকা ও জামালপুরের দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: ব্যাসার্ধ $= r = 6440$ কি.মি.

পৃথিবীর কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 2^\circ = 2 \times \frac{\pi^c}{180} = \frac{\pi}{90}$ রেডিয়ান।

$\therefore s =$ চাপের দৈর্ঘ্য $=$ ঢাকা ও জামালপুরের দূরত্ব $= r\theta = 6440 \times \frac{\pi}{90}$ কি.মি.

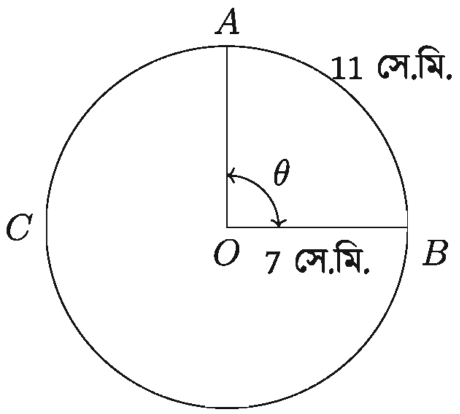
$= \frac{644\pi}{9}$ কি.মি

$= 224.8$ কি.মি. (প্রায়)

নির্ণেয় দূরত্ব: 224.8 কি.মি. (প্রায়)।

উদাহরণ ৭. কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 সে.মি.। বৃত্তের 11 সে.মি. দীর্ঘ চাপের কেন্দ্রস্থ কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ABC বৃত্তের ব্যাসার্ধ $OB = 7$ সে.মি. এবং চাপ $AB = 11$ সে.মি.। AB চাপের কেন্দ্রস্থ কোণের পরিমাণ θ নির্ণয় করতে হবে।



আমরা জানি, $s = r\theta$

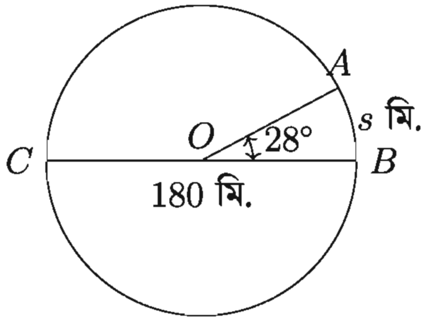
বা, $\theta = \frac{s}{r} = \frac{11 \text{ সে.মি.}}{7 \text{ সে.মি.}}$

$= 1.57$ রেডিয়ান (প্রায়)

নির্ণেয় কোণের পরিমাণ: 1.57 রেডিয়ান (প্রায়)।

উদাহরণ ৮. এহসান সাইকেলে চড়ে বৃত্তাকার পথে 10 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি চাপটি কেন্দ্রে 28° কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাস 180 মিটার হয়, তবে এহসানের গতিবেগ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, এহসান ABC বৃত্তের B বিন্দু থেকে যাত্রা করে 10 সেকেন্ড পরে পরিধির উপর A বিন্দুতে আসে।



তাহলে AB চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB = 28^\circ$

$OB =$ ব্যাসার্ধ $= \frac{180}{2}$ মিটার $= 90$ মিটার

ধরি, চাপ $AB = s$ মিটার

আমরা জানি,

$s = r\theta$

$= 90 \times 28 \times \frac{\pi}{180}$ মিটার

$= 14\pi$ মিটার

$= 14 \times 3.1416$ মিটার (প্রায়)

$= 43.98$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ এহসানের গতিবেগ $= \frac{43.98}{10}$ মিটার/সেকেন্ড $= 4.398$ মিটার/সেকেন্ড $= 4.4$ মিটার/সেকেন্ড (প্রায়)

নির্ণেয় গতিবেগ: 4.4 মিটার/সেকেন্ড (প্রায়)

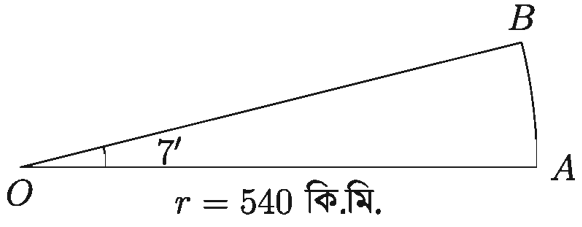
উদাহরণ ৯. 540 কিলোমিটার দূরে একটি বিন্দুতে কোনো পাহাড় $7'$ কোণ উৎপন্ন করে। পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, AB পাহাড়টির পাদবিন্দু A থেকে 540 কি.মি. দূরে O বিন্দুতে পাহাড়টি $7'$ কোণ উৎপন্ন করে।

তাহলে $AO = r =$ ব্যাসার্ধ $= 540$ কি.মি.

কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOB = 7' = \left(\frac{7}{60}\right)^\circ = \frac{7\pi}{60 \times 180}$ রেডিয়ান।

পাহাড়ের উচ্চতা $\approx$ চাপ $= s$ কি.মি.



আমরা জানি,

$s = r\theta = 540 \times \frac{7\pi}{60 \times 180}$ কি.মি.

$= \frac{7 \times 3.1416}{20}$ কি.মি. (প্রায়)

$= 1.1$ কি.মি. (প্রায়)

$\therefore$ পাহাড়টির উচ্চতা 1.1 কি.মি. (প্রায়) বা 1100 মিটার (প্রায়)।

অনুশীলনী ৮.১

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নের সমস্যাগুলোর সমাধান নির্ণয় কর। সমস্ত ক্ষেত্রে π এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত ব্যবহার কর ($\pi = 3.1416$).

১. ক) রেডিয়ানে প্রকাশ কর:

(i) $75^\circ 30'$ (ii) $55^\circ 54' 53''$ (iii) $33^\circ 22' 11''$

খ) ডিগ্রিতে প্রকাশ কর:

(i) $\frac{8\pi}{13}$ রেডিয়ান (ii) 1.3177 রেডিয়ান (iii) 0.9759 রেডিয়ান

২. একটি কোণকে ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে যথাক্রমে D° ও R^c দ্বারা প্রকাশ করা হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$।

৩. একটি চাকার ব্যাসার্ধ 2 মিটার 3 সে.মি. হলে, চাকার পরিধির আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

৪. একটি গাড়ির চাকার ব্যাস 0.84 মিটার এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 6 বার ঘুরে। গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

৫. কেনো ত্রিভুজের কোণ তিনটির অনুপাত $2 : 5 : 3$ হলে ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম কোণের বৃত্তীয় মান কত?

৬. একটি ত্রিভুজের কোণগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত এবং বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের দ্বিগুণ। কোণগুলোর রেডিয়ান পরিমাপ কত?

৭. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। ঢাকা ও চট্টগ্রাম পৃথিবীর কেন্দ্রে 5° কোণ উৎপন্ন করে। ঢাকা ও চট্টগ্রামের দূরত্ব কত?

৮. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। টেকনাফ ও তেতুলিয়া পৃথিবীর কেন্দ্রে $10^\circ 6' 3''$ কোণ উৎপন্ন করে। টেকনাফ ও তেতুলিয়ার মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

৯. শাহেদ একটি সাইকেলে চড়ে বৃত্তাকার পথে 11 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি চাপটি কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাস 201 মিটার হয়, তবে শাহেদের গতিবেগ কত?

১০. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। পৃথিবীর উপরের যে দুইটি স্থান কেন্দ্রে $32''$ কোণ উৎপন্ন করে তাদের দূরত্ব কত?

১১. সকাল $9 : 30$ টায় ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর। [সংকেত: এক ঘর কেন্দ্রে $\dfrac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে। $9 : 30$ টায় ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যে ব্যবধান $\left(15 + 2\dfrac{1}{2}\right)$ বা $17\dfrac{1}{2}$ ঘর]

১২. এক ব্যক্তি বৃত্তাকার পথে ঘন্টায় 6 কি.মি. বেগে দৌড়ে 36 সেকেন্ডে যে বৃত্তচাপ অতিক্রম করে তা কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস নির্ণয় কর।

১৩. 750 কিলোমিটার দূরে একটি বিন্দুতে কোনো পাহাড় $8'$ কোণ উৎপন্ন করে। পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর।

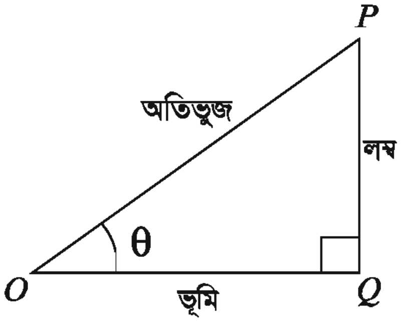
ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ (Trigonometric Ratios)

ত্রিকোণমিতির এই অংশে প্রথমে সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ (sine, cosine, tangent, secant, cosecant, cotangent) সম্পর্কে আলোচনা করা হবে। সূক্ষ্মকোণের অনুপাতসমূহের মাধ্যমে যেকোনো কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয়ের কৌশল আলোচনা করা হবে। অনুপাতসমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক এবং বিভিন্ন চতুর্ভাগে এদের চিহ্ন কি হবে সে সম্পর্কে ব্যাখ্যা করা হবে। ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত কতিপয় অভেদ সম্পর্কে ধারণা দেওয়া হবে।

এছাড়াও আদর্শ কোণসমূহের $\left(0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং অনুপাতসমূহের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্নমান অর্থাৎ মানের পরিধি সম্পর্কে আলোচনাও এই অংশে অন্তর্ভুক্ত থাকবে।

(ক) সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ (Trigonometric Ratios of Acute Angles):

সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় করার জন্য আমরা একটি সমকোণী ত্রিভুজ $\triangle OPQ$ বিবেচনা করি। $\triangle OPQ$ এ $\angle OQP$ সমকোণ। $\angle POQ$ এর সাপেক্ষে OP ত্রিভুজের অতিভুজ (hypotenuse), OQ ভূমি (adjacent side), PQ লম্ব (opposite side) এবং $\angle POQ = \theta$ (সূক্ষ্মকোণ)। OPQ সমকোণী ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণ θ এর জন্য ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (sine, cosine, tangent, secant, cosecant, cotangent) নিম্নোক্তভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়:



$$\sin\theta = \frac{PQ}{OP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} \qquad \text{cosec}\theta = \frac{OP}{PQ} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$$

$$\cos\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} \qquad \sec\theta = \frac{OP}{OQ} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$$

$$\tan\theta = \frac{PQ}{OQ} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} \qquad \cot\theta = \frac{OQ}{PQ} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$$

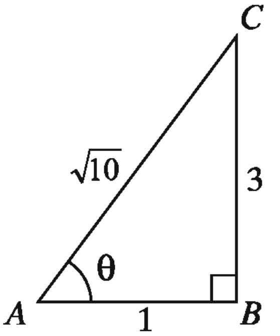
উদাহরণ ১০. একটি সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে $\tan\theta = 3$ হলে অন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যেখানে অতিভুজ $= AC$, ভূমি $= AB$, লম্ব $= BC$ এবং $\angle BAC = \theta$

দেওয়া আছে $\tan\theta = 3$

বা, $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{3}{1}$

$\therefore$ লম্ব $BC = 3$ একক এবং ভূমি $AB = 1$ একক।



পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী
অতিভুজ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ একক

$\therefore$ অন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \qquad \text{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$\cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ $\qquad$ $\sec\theta = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$

এবং $\cot\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \dfrac{1}{3}$

লক্ষণীয়: যেহেতু অনুপাতের কোনো একক থাকেনা এবং sine, cosine, tangent, secant, cosecant, cotangent এই ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত, তাই এদের কোনো একক নাই।

কাজ: ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$। অন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

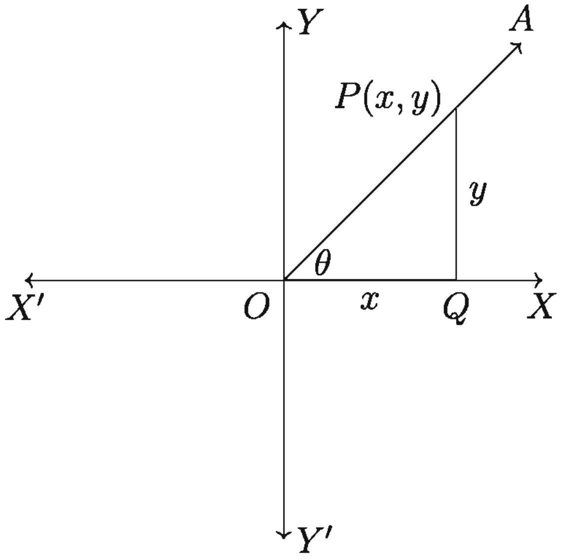
দ্রষ্টব্য: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহকে সংক্ষেপে লিখা হয়। যেমন:

$\text{sine}\theta = \sin\theta, \quad \text{cosine}\theta = \cos\theta, \quad \text{tangent}\theta = \tan\theta,$

$\text{secant}\theta = \sec\theta, \quad \text{cosecant}\theta = \text{cosec}\theta, \quad \text{cotangent}\theta = \cot\theta$

(খ) যেকোনো কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ: এই অংশে আমরা যেকোনো কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় করব। সে জন্য আমাদের কোণটির প্রমিত বা আদর্শ অবস্থান (Standard position) জানা দরকার। কার্তেসীয় সমতলে মূলবিন্দু থেকে ডানদিকে অর্থাৎ ধনাত্মক x-অক্ষকে আদি রশ্মি ধরে কোণটি অঙ্কন করলেই এর আদর্শ অবস্থান পাওয়া যায়। এখানে θ কে আমরা ত্রিকোণমিতিক কোণ হিসাবে বিবেচনা করব অর্থাৎ θ কোণের পরিমাণ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকবে না।

মনে করি, কার্তেসীয় তলে $X'OX$ রেখা x-অক্ষ, $Y'OY$ রেখা y-অক্ষ এবং O বিন্দু মূলবিন্দু। ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA ধনাত্মক x-অক্ষ অর্থাৎ OX রশ্মি থেকে শুরু করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (anticlockwise) ঘুরে OA অবস্থানে θ কোণ উৎপন্ন করেছে (নিচের চিত্র)।



OX কে θ কোণের আদিবাহু (initial side) এবং OA কে প্রান্তিকবাহু (terminal side) বলা হয়। OA প্রান্তিক বাহুর উপর O বিন্দু ভিন্ন $P(x,y)$ একটি বিন্দু নিই। তাহলে OX থেকে বিন্দুটির লম্ব দূরত্ব y, OY থেকে এর লম্ব দূরত্ব x এবং $\angle OQP$ সমকোণ (উপরের চিত্র)।

সুতরাং পীথাগোরাসের সূত্র অনুসারে অতিভুজ $|OP| = r = \sqrt{x^2+y^2}$। তাহলে যে কোনো কোণ θ এর জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ হবে:

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{y}{x} \qquad [x \neq 0]$$

$$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{r}{x} \qquad [x \neq 0]$$

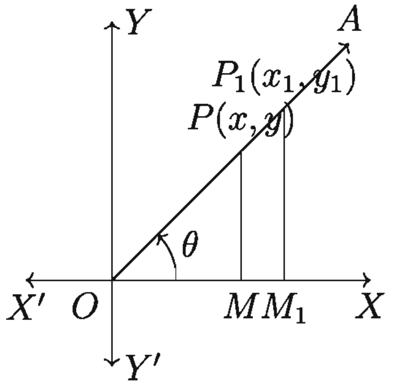
$$\text{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{r}{y} \qquad [y \neq 0]$$

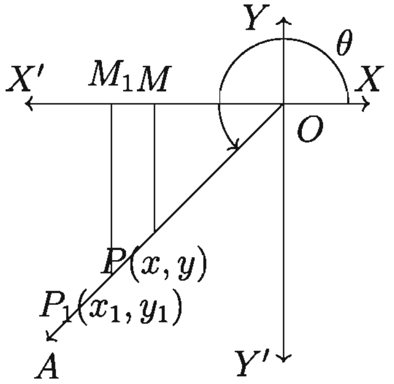
$$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{x}{y} \qquad [y \neq 0]$$

লক্ষণীয় ১: P এবং O বিন্দু ভিন্ন হওয়ায় $r = |OP| > 0$ এবং $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ সবসময়ই অর্থবহ। OA প্রান্তিক বাহু x-অক্ষের উপর থাকলে $y = 0$ হয় বলে এরূপ কোণের জন্য $\text{cosec}\theta$ ও $\cot\theta$ সংজ্ঞায়িত নয়।

অনুরূপভাবে, OA প্রান্তিক বাহু y-অক্ষের উপর থাকলে $x = 0$ হয় এবং এরূপ কোণের জন্য $\sec\theta$ ও $\tan\theta$ সংজ্ঞায়িত হয় না।

লক্ষণীয় ২: প্রান্তিক বাহু OA এর উপর $P(x,y)$ বিন্দু ভিন্ন অন্য কোনো বিন্দু $P_1(x_1,y_1)$ নিই (নিচের বামের চিত্র ও ডানের চিত্র)। $P(x,y)$ ও $P_1(x_1,y_1)$ বিন্দুদ্বয় থেকে x-অক্ষের উপর PM ও P_1M_1 লম্ব আঁকি। তাহলে $\triangle OPM$ এবং $\triangle OP_1M_1$ সদৃশ।





অর্থাৎ $\dfrac{|x|}{|x_1|} = \dfrac{|y|}{|y_1|} = \dfrac{|OP|}{|OP_1|} = \dfrac{r}{r_1}$

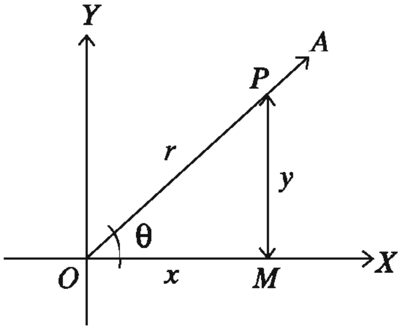
এখানে, $OP = r$, $OP_1 = r_1$, x ও x_1 এবং y ও y_1 একই চিহ্নযুক্ত।

$\therefore \dfrac{x}{x_1} = \dfrac{y}{y_1} = \dfrac{r}{r_1}$ অর্থাৎ, $\dfrac{x}{r} = \dfrac{x_1}{r_1}$ এবং $\dfrac{y}{r} = \dfrac{y_1}{r_1}$

সুতরাং $\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{y_1}{r_1}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x_1}{r_1}$ $\quad \tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y_1}{x_1}$ ইত্যাদি।

সিদ্ধান্ত: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান প্রান্তিক রশ্মি OA এর উপর নির্বাচিত বিন্দু P এর উপর নির্ভর করে না।

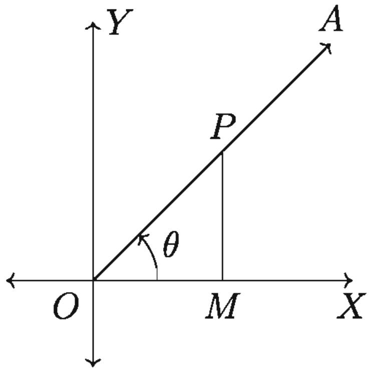


লক্ষণীয় ৩: θ সূক্ষ্মকোণ হলে প্রমিত বা আদর্শ অবস্থানে এর প্রান্তিক বাহু OA প্রথম চতুর্ভাগে থাকে এবং $\theta = \angle XOA$ হয় (পাশের চিত্র)। OA বাহুতে যেকোন বিন্দু $P(x, y)$ নিয়ে এবং P থেকে OX এর উপর PM লম্ব টেনে দেখা যায় যে, $OM = x$, $PM = y$ এবং $OP = r$ ধরে পূর্ববর্তী আলোচনার (ক) ও (খ) থেকে θ কোণের অনুপাতগুলোর একই মান পাওয়া যায়।

(গ) ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর পারস্পরিক সম্পর্ক: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের সংজ্ঞা থেকে আমরা লক্ষ করি যে,

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}},\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{1}{\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}} = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \text{ এবং } \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$



$$\text{অনুরূপভাবে, } \cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}},\ \sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{1}{\dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}} = \frac{1}{\cos\theta}$$

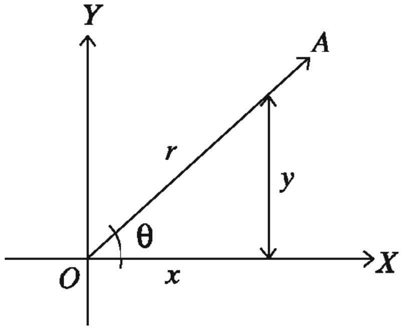
অর্থাৎ $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

একইভাবে, $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সংক্রান্ত কতিপয় সহজ অভেদাবলী (Identities):

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

প্রমাণ: পাশের চিত্র থেকে আমরা দেখি,



$\cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{x}{r}$

$\sin\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{y}{r}$

এবং $r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = \dfrac{x^2+y^2}{r^2} = \dfrac{r^2}{r^2} = 1$

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (প্রমাণিত)।

(i) নং সূত্র থেকে আমরা পাই, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ বা, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

(ii) $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ বা, $\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

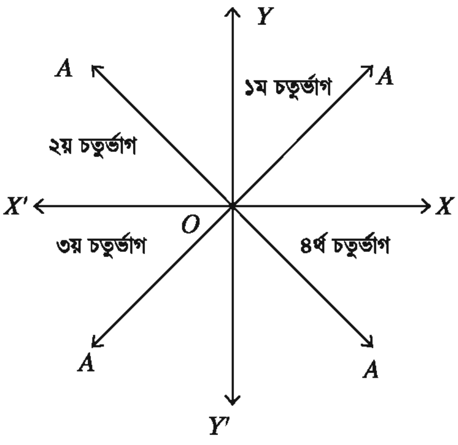
(iii) $1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$ বা, $\operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \cot^2\theta$

কাজ: প্রমাণ কর যে, (চিত্রের সাহায্যে)

ক) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ খ) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের চিহ্ন

পাশের চিত্রে কার্তেসীয় তলকে $X'OX$ এবং $Y'OY$ অক্ষদ্বয় দ্বারা চারটি চতুর্ভাগ (Quadrant) যথাক্রমে XOY (১ম চতুর্ভাগ), YOX' (২য় চতুর্ভাগ), $X'OY'$ (৩য় চতুর্ভাগ) এবং $Y'OX$ (৪র্থ চতুর্ভাগ) বিভক্ত করা হয়েছে।



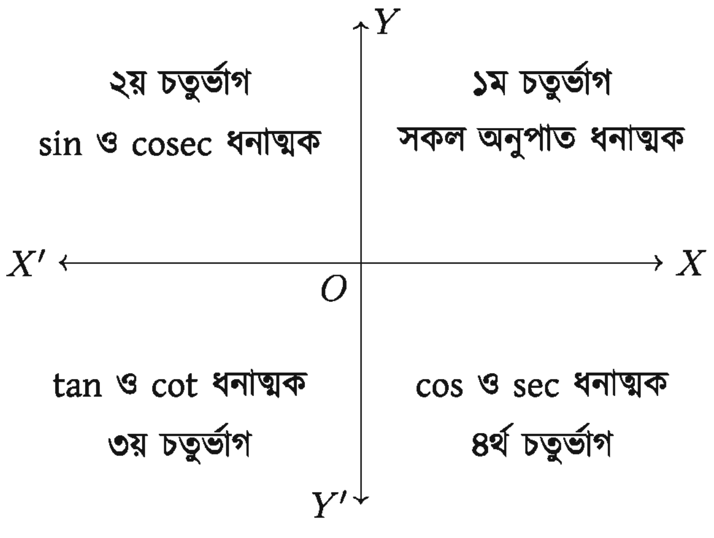
আদি অবস্থান OX থেকে একটি রশ্মি OA, ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘূর্ণনের ফলে OA এর প্রান্তিক অবস্থানের উপর নির্ভর করে বিভিন্ন কোণ উৎপন্ন হবে। ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA এর উপর যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ নিই। তাহলে $|OP| = r$. প্রান্তিক রশ্মি OA এবং P বিন্দুর বিভিন্ন চতুর্ভাগে অবস্থানের সঙ্গে সঙ্গে x ও y এর চিহ্ন পরিবর্তন হবে কিন্তু r সবসময় ধনাত্মক থাকবে।

OA রশ্মি যখন প্রথম চতুর্ভাগে থাকে, তখন x ও y এর মান ধনাত্মক। তাই প্রথম চতুর্ভাগে সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ধনাত্মক। OA রশ্মি যখন দ্বিতীয় চতুর্ভাগে থাকে তখন P বিন্দুর ভুজ x ঋণাত্মক এবং কোটি y ধনাত্মক। এজন্য দ্বিতীয় চতুর্ভাগে sin $\left(\sin\theta = \frac{y}{r}\right)$ এবং cosec $\left(\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}\right)$ অনুপাত দুইটি ধনাত্মক। অন্যসব অনুপাত ঋণাত্মক। একইভাবে তৃতীয় চতুর্ভাগে P বিন্দুর ভুজ x ও কোটি y উভয়ই ঋণাত্মক এবং tan $\left(\tan\theta = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}\right)$ ও cot $\left(\cot\theta = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}\right)$ ধনাত্মক। অন্য অনুপাতসমূহ ঋণাত্মক। চতুর্থ চতুর্ভাগে OA রশ্মির উপর P বিন্দুর ভুজ x ধনাত্মক এবং কোটি y ঋণাত্মক বলে cos $\left(\cos\theta = \frac{x}{r}\right)$ এবং sec $\left(\sec\theta = \frac{r}{x}\right)$ ধনাত্মক এবং অন্যসব ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঋণাত্মক।

আবার, x-অক্ষের যেকোনো অবস্থানে y এর মান শূন্য বলে cosec $\left(\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}\right)$ এবং cot $\left(\cot\theta = \frac{x}{y}\right)$ অনুপাত দুইটি সংজ্ঞায়িত নয়।

অনুরূপভাবে, y-অক্ষের যেকোনো অবস্থানে x এর মান শূন্য। তাই y-অক্ষের উপর sec $\left(\sec\theta = \frac{r}{x}\right)$ এবং tan $\left(\tan\theta = \frac{y}{x}\right)$ সংজ্ঞায়িত নয়। sin $\left(\sin\theta = \frac{y}{r}\right)$ এবং cos $\left(\cos\theta = \frac{x}{r}\right)$ অনুপাত দুইটি P বিন্দুর যেকোনো অবস্থানেই সংজ্ঞায়িত এবং বাস্তব মান আছে।

উপরোক্ত আলোচনার সারাংশ নিম্নের চিত্রে দেখানো হলো। উক্ত চিত্রের সাহায্যে যেকোনো কোণের প্রান্তিক রশ্মির অবস্থানের উপর নির্ভর করে উক্ত কোণের সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের চিহ্ন নির্ণয় সহজ হবে।



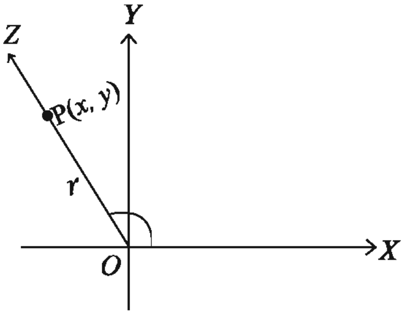
ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ

নবম-দশম শ্রেণির গণিতে সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সম্পর্কে আলোচনা করা হয়েছে। আমরা এখানে যেকোনো কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহ বর্ণনা করবো।

কোণের প্রমিত অবস্থান (Standard Position): কার্তেসীয় তলে মূল বিন্দু O তে ধনাত্মক x-অক্ষকে আদি রশ্মি ধরে কোণ অঙ্কন করলে কোণটির প্রমিত অবস্থান পাওয়া যায়।

অনুপাতসমূহের সংজ্ঞা

θ যেকোনো কোণ। এর প্রমিত অবস্থানে ঘূর্ণায়মান রশ্মি OZ এর উপর বিন্দু $P(x, y)$ নিই যেখানে $OP = r(> 0)$। তাহলে θ কোণের



sine অনুপাত, $\sin\theta = \frac{y}{r}$

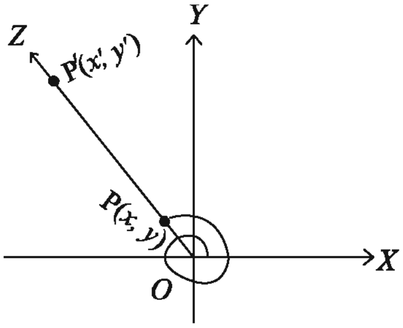
cosine অনুপাত, $\cos\theta = \frac{x}{r}$

tangent অনুপাত, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ [যখন $x \neq 0$]

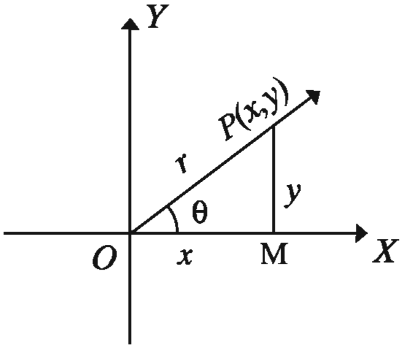
cotangent অনুপাত, $\cot\theta = \frac{x}{y}$ [যখন $y \neq 0$]

secant অনুপাত, $\sec\theta = \frac{r}{x}$ [যখন $x \neq 0$]

cosecant অনুপাত, $\text{cosec}\theta = \frac{r}{y}$ [যখন $y \neq 0$]



লক্ষণীয় যে, রশ্মি OZ এর ওপর $P(x, y)$, $P'(x', y')$ দুইটি বিন্দু যেখানে $OP = r(> 0)$, $OP' = r'(> 0)$; x, x' এবং y, y' একই চিহ্নযুক্ত। ফলে $\triangle OPM$ ও $\triangle OP'M'$ হতে পাই।
$\frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}$, $\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$ ইত্যাদি।
ফলে θ কোণের অনুপাত সমূহের মান OZ রশ্মিতে P বিন্দুর অবস্থানের উপর নির্ভর করে না।



θ সূক্ষ্মকোণ হলে $\triangle OPM$ সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ $OP = r$, সন্নিহিত বাহু $OM = x$, বিপরীত বাহু $PM = y$. সুতরাং,

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}, \text{ ইত্যাদি।}$$

সুতরাং সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের স্থানাঙ্ক ভিত্তিক সংজ্ঞা ও নবম-দশম শ্রেণির

গণিত বইয়ের প্রদত্ত সমকোণী ত্রিভুজভিত্তিক সংজ্ঞা একই।

$0°$ এবং $90°$ কোণের অনুপাত সমূহ: $0°$ কোণের ক্ষেত্রে ঘূর্ণায়মান রশ্মি OX রেখার ওপর থাকে। সুতরাং $P(x,0)$ এবং $r = OP = x.$ অতএব,

$$\sin 0° = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

$$\cos 0° = \frac{x}{r} = \frac{x}{x} = 1$$

$90°$ কোণের ক্ষেত্রে ঘূর্ণায়মান রশ্মি OY রেখার ওপর থাকে। সুতরাং $P(0,y)$ এবং $r = OP = y.$

$$\sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{y}{y} = 1$$

$$\cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0$$

সংজ্ঞা থেকে সহজেই দেখা যায়, যেকোনো θ কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের নিম্নোক্ত ধর্মাবলী প্রযোজ্য।

১. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

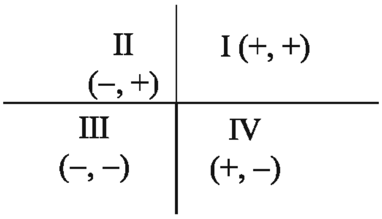
প্রমাণ: $\sin\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $r^2 = x^2 + y^2$

$$\therefore\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

২. $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

যেখানে অনুপাতগুলো সংজ্ঞায়িত।



৩. উপরের চিত্রে প্রদত্ত স্থানাঙ্ক চিহ্ন বিবেচনা করে দেখা যায় যে

II sin, cosec ধনাত্মক	I সকল অনুপাত ধনাত্মক
III tan, cot ধনাত্মক	IV cos, sec ধনাত্মক

৪. $|\sin\theta| \leq 1, \ |\cos\theta| \leq 1$

প্রমাণ: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta \leq 1, \ \cos^2\theta \leq 1$

অর্থাৎ $|\sin\theta| \leq 1, \ |\cos\theta| \leq 1$

৫. θ এর বিভিন্ন মানের জন্য $\sin\theta$, $\cos\theta$ এবং $\tan\theta$ এর মান নিম্নরূপ:

	0°	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত

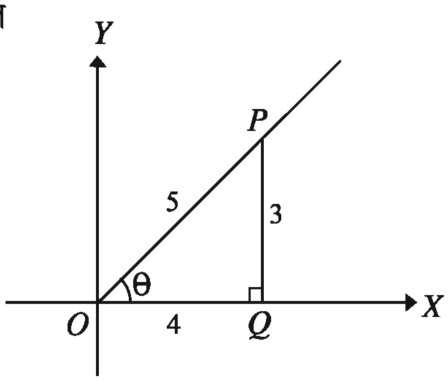
উদাহরণ ১১. θ সূক্ষ্মকোণ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ এবং $\cos\theta = \frac{4}{5}$ হলে, অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ত্রিকোণমিতিক অভেদ (Identities) ব্যবহার করে।

আমরা জানি, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$

$\therefore \sin\theta = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$



যেহেতু θ সূক্ষ্মকোণ, তাই θ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত এবং সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ধনাত্মক।

$\therefore \sin\theta = \frac{3}{5}$

এখন, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$

এখন $\triangle POQ$ সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই,

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{\text{লম্ব/অতিভুজ}}{\text{ভূমি/অতিভুজ}} = \frac{PQ/OP}{OQ/OP}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{\text{ভূমি/অতিভুজ}}{\text{লম্ব/অতিভুজ}} = \frac{OQ/OP}{PQ/OP}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{4/5}{3/5} = \frac{4}{3}$$

বি.দ্র: $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

ত্রিকোণমিতিক অভেদের সাহায্যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

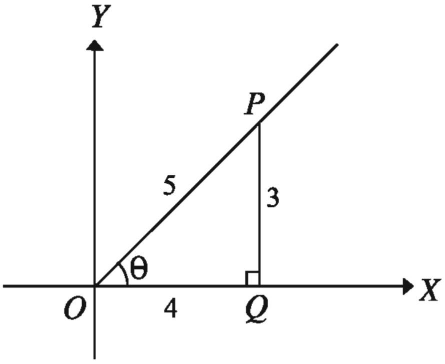
বা, $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1 = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$

$\therefore \tan\theta = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

আবার, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1 = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}$

$\therefore \cot\theta = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$



বিকল্প: আমরা জানি, $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{4}{5}$ [দেওয়া আছে]

পাশের চিত্রে সমকোণী ত্রিভুজ POQ থেকে পাই,

$PQ = \sqrt{OP^2 - OQ^2} = \sqrt{5^2 - 4^2}$

$= \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$ একক

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{3}{4}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{OP}{OQ} = \frac{5}{4}$$

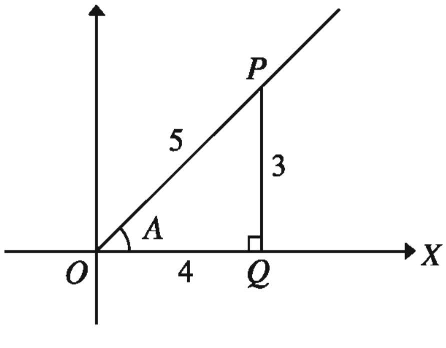
$$\text{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{OP}{PQ} = \frac{5}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{OQ}{PQ} = \frac{4}{3}$$

কাজ: θ স্থূলকোণ $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$ এবং $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ হলে, অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ সমকোণী ত্রিভুজ এবং ত্রিকোণমিতিক অভেদ এর সাহায্যে নির্ণয় কর।

উদাহরণ ১২. $\cos A = \frac{4}{5}, \sin B = \frac{12}{13}$ এবং A ও B উভয়ই সূক্ষ্মকোণ হলে $\frac{\tan B - \tan A}{1 + \tan B \cdot \tan A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\cos A = \frac{4}{5}$



আমরা জানি, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

বা, $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

$\therefore \sin A = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$ [A সূক্ষ্মকোণ]

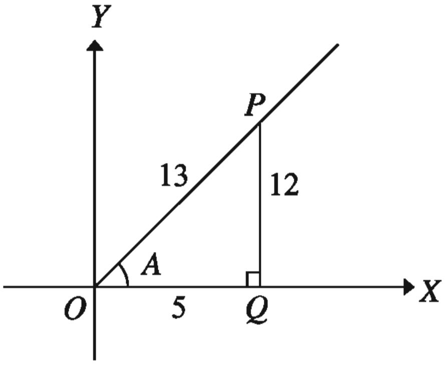
$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

আবার, $\sin B = \dfrac{12}{13}$

$\therefore \cos B = \sqrt{1-\sin^2 B} = \sqrt{1-\dfrac{144}{169}} = \sqrt{\dfrac{25}{169}}$

$\therefore \cos B = \dfrac{5}{13}$

$\therefore \tan B = \dfrac{\sin B}{\cos B} = \dfrac{12/13}{5/13} = \dfrac{12}{5}$



এখন, $\dfrac{\tan B - \tan A}{1+\tan B\cdot\tan A} = \dfrac{\dfrac{12}{5}-\dfrac{3}{4}}{1+\dfrac{12}{5}\cdot\dfrac{3}{4}}$

$$= \frac{\dfrac{48-15}{20}}{1+\dfrac{36}{20}} = \frac{\dfrac{33}{20}}{\dfrac{20+36}{20}} = \frac{33}{56}$$

$\therefore \dfrac{\tan B - \tan A}{1+\tan B\cdot\tan A} = \dfrac{33}{56}$

উদাহরণ ১৩. মান নির্ণয় কর: $\sin^2\dfrac{\pi}{6} + \cos^2\dfrac{\pi}{4} + \tan^2\dfrac{\pi}{3} + \cot^2\dfrac{\pi}{2}$

সমাধান: আমরা জানি, $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ এবং $\cot\dfrac{\pi}{2} = 0$

$\therefore \sin^2\dfrac{\pi}{6} + \cos^2\dfrac{\pi}{4} + \tan^2\dfrac{\pi}{3} + \cot^2\dfrac{\pi}{2}$

$= \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 + (0)^2$

$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} + 3 = 3\dfrac{3}{4}$

কাজ:

ক) $\sin^2\dfrac{\pi}{4}\cos^2\dfrac{\pi}{3} + \tan^2\dfrac{\pi}{6}\sec^2\dfrac{\pi}{3} + \cot^2\dfrac{\pi}{3}\operatorname{cosec}^2\dfrac{\pi}{4}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) সরল কর: $\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}} - \dfrac{\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}}$

উদাহরণ ১৪. $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

২০২৫

সমাধান: দেওয়া আছে, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4 \implies 4\sin^2\theta = 1 \implies \sin^2\theta = \frac{1}{4}$

আবার, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$\therefore \tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

$\therefore \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ ১৫. $15\cos^2\theta + 2\sin\theta = 7$ এবং $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ হলে $\cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $15\cos^2\theta + 2\sin\theta = 7$

বা, $15(1 - \sin^2\theta) + 2\sin\theta = 7$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

বা, $15 - 15\sin^2\theta + 2\sin\theta = 7 \implies 15\sin^2\theta - 2\sin\theta - 8 = 0$

বা, $15\sin^2\theta - 12\sin\theta + 10\sin\theta - 8 = 0 \implies (3\sin\theta + 2)(5\sin\theta - 4) = 0$

$\therefore \sin\theta = -\frac{2}{3}$ বা, $\sin\theta = \frac{4}{5}$

$\sin\theta$ এর উভয় মান গ্রহণযোগ্য। কেননা $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\sin\theta = -\frac{2}{3}$ হলে $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin\theta = \frac{4}{5}$ হলে $\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

$$\therefore \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \quad [\text{যখন } \sin\theta = -\frac{2}{3}]$$

$$\text{অথবা } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4} \quad [\text{যখন } \sin\theta = \frac{4}{5}]$$

২০১৫ নির্ণেয় মান $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ বা, $\frac{3}{4}$

উদাহরণ ১৬. $A = \frac{\pi}{3}$ ও $B = \frac{\pi}{6}$ হলে প্রমাণ কর যে,

ক) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

খ) $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

সমাধান:

ক) বামপক্ষ $= \sin(A+B) = \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

ডানপক্ষ $= \sin A\cos B + \cos A\sin B = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

খ) বামপক্ষ $= \tan(A-B) = \tan(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ডানপক্ষ $= \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B} = \dfrac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}}$

$$= \frac{\sqrt{3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ (প্রমাণিত)।

কাজ: $A = \frac{\pi}{3}$ ও $B = \frac{\pi}{6}$ এর জন্য নিম্নোক্ত অভেদসমূহ প্রমাণ কর:

ক) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

খ) $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

গ) $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

ঘ) $\tan 2B = \dfrac{2\tan B}{1 - \tan^2 B}$

অনুশীলনী ৮.২

১. ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে মান নির্ণয় কর:

ক) $\dfrac{\cos\dfrac{\pi}{4}}{\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{3}}$ খ) $\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\dfrac{\pi}{6}\cdot\tan\dfrac{\pi}{3}$

২. $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ এবং $\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$ হলে $\tan\theta$ এবং $\sin\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

৩. $\sin A=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ এবং $\dfrac{\pi}{2}<A<\pi$ এর ক্ষেত্রে $\cos A$ এবং $\tan A$ এর মান কত?

৪. দেওয়া আছে, $\cos A=\dfrac{1}{2}$ এবং $\cos A$ ও $\sin A$ একই চিহ্নবিশিষ্ট। $\sin A$ ও $\tan A$ এর মান কত?

৫. দেওয়া আছে, $\tan A=-\dfrac{5}{12}$ এবং $\tan A$ ও $\cos A$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট। $\sin A$ ও $\cos A$ এর মান নির্ণয় কর।

৬. নিম্নলিখিত অভেদসমূহ প্রমাণ কর:

ক) $\tan A+\cot A=\sec A\operatorname{cosec} A$

খ) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}=\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta=\sqrt{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}$

গ) $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sec A-\tan A$

ঘ) $\sec^4\theta-\sec^2\theta=\tan^4\theta+\tan^2\theta$

ঙ) $(\sec\theta-\cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)(\tan\theta+\cot\theta)=1$

চ) $\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}=\tan\theta+\sec\theta$

৭. যদি $\operatorname{cosec}A=\dfrac{a}{b}$ হয়, যেখানে $a>b>0$, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan A=\dfrac{\pm b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

৮. যদি $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$

৯. $\tan\theta=\dfrac{x}{y}$, $x\neq y$ হলে, $\dfrac{x\sin\theta+y\cos\theta}{x\sin\theta-y\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

১০. $\tan\theta+\sec\theta=x$ হলে, দেখাও যে, $\sin\theta=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

১১. $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta+b\cos\theta=\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

১২. মান নির্ণয় কর:

ক) $\sin^2\dfrac{\pi}{6}+\cos^2\dfrac{\pi}{4}+\tan^2\dfrac{\pi}{3}+\cot^2\dfrac{\pi}{6}$

খ) $3\tan^2\dfrac{\pi}{4}-\sin^2\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\cot^2\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{3}\sec^2\dfrac{\pi}{4}$

গ) $\tan^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{3}\tan^2\frac{\pi}{6}\tan^2\frac{\pi}{3}\cos^2\frac{\pi}{4}$

ঘ) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}} + \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$

১৩. সরল কর:

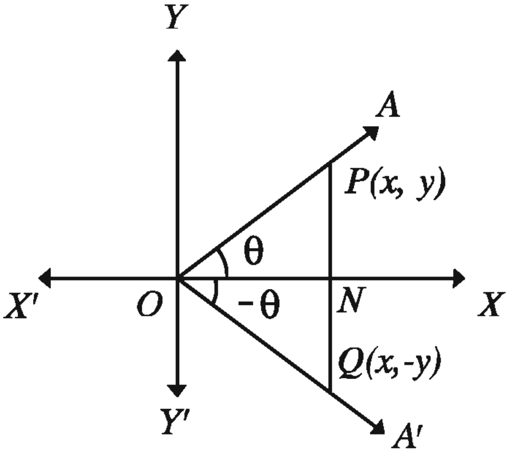
$$\frac{1 - \sin^2\frac{\pi}{6}}{1 + \sin^2\frac{\pi}{4}} \times \frac{\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{6}}{\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2} - \cot^2\frac{\pi}{2}} \div \left(\sin\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}\right) + \left(\sec^2\frac{\pi}{6} - \tan^2\frac{\pi}{6}\right)$$

বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ

ত্রিকোণমিতিক আলোচনার দ্বিতীয় অংশে আমরা সূক্ষ্মকোণের $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ অনুপাতসমূহ নির্ণয়ের কৌশল আলোচনা করেছি। অনুপাতসমূহের পারস্পরিক সম্পর্ক এবং এতদসংক্রান্ত কয়েকটি সহজ অভেদ প্রমাণ করা হয়েছে। বিভিন্ন চতুর্ভাগে অনুপাতসমূহের চিহ্ন নির্ধারণ, আদর্শ কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত এবং অনুপাতসমূহের সর্বনিম্ন ও সর্বোচ্চ মানের ধারণাও দেওয়া হয়েছে। আলোচনার এই অংশে প্রথমে ঋণাত্মক কোণ $(-\theta)$ এর অনুপাতসমূহ নির্ণয় করা হবে। এর উপর ভিত্তি করে ধারাবাহিকভাবে $\frac{\pi}{2} - \theta$, $\frac{\pi}{2} + \theta$ $\pi + \theta$, $\pi - \theta$, $\frac{3\pi}{2} + \theta$, $\frac{3\pi}{2} - \theta$, $2\pi + \theta$, $2\pi - \theta$ এবং $\frac{n\pi}{2} + \theta$ ও $\frac{n\pi}{2} - \theta$ $\left[\text{যেখানে } n \text{ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right]$ কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক আলোচনা অন্তর্ভুক্ত থাকবে।

$(-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$:

মনে করি ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA এর আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে প্রথম চতুর্ভাগে $\angle XOA = \theta$ এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে একই দূরত্ব ঘুরে চতুর্থ চতুর্ভাগে $\angle XOA' = -\theta$ কোণ উৎপন্ন করে (নিচের চিত্র)। OA রশ্মির উপর যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ নিই। এখন $P(x, y)$ বিন্দু থেকে OX এর ওপর PN লম্ব আঁকি এবং PN কে বর্ধিত করায় তা OA' কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে QN রেখা OX এর ওপর লম্ব। যেহেতু $P(x, y)$ বিন্দুর অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে সেহেতু $x > 0$, $y > 0$ এবং $ON = x$, $PN = y$.



এখন $\triangle OPN$ ও $\triangle OQN$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle PON = \angle QON$, $\angle ONP = \angle ONQ$ এবং ON উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু। সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore PN = QN$ এবং $OP = OQ$.

Q বিন্দুর অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে হওয়ায় এর কোটি ঋণাত্মক। সুতরাং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $Q(x, -y)$. OQN সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে ON = ভূমি, QN = লম্ব এবং OQ = অতিভুজ = r (ধরি)।

তাহলে পূর্ববর্তী আলোচনা থেকে আমরা পাই,

$$\sin(-\theta) = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{QN}{OQ} = \frac{-y}{r} = -\frac{PN}{OP} = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{ON}{OQ} = \frac{x}{r} = \frac{ON}{OP} = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{QN}{ON} = \frac{-y}{x} = -\frac{PN}{ON} = -\tan\theta$$

একইভাবে, $\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\theta,\ \sec(-\theta) = \sec\theta,\ \cot(-\theta) = -\cot\theta$

মন্তব্য: যেকোনো কোণ θ এর জন্য উপরিউক্ত সম্পর্কগুলো প্রযোজ্য।

উদাহরণ ১৭.

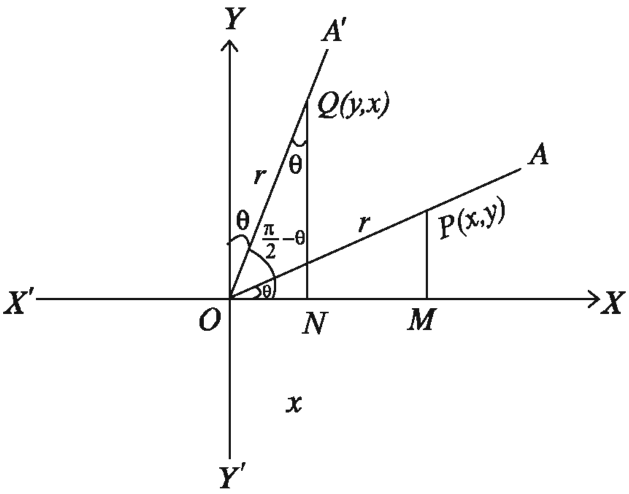
$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right),\ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{cosec}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\text{cosec}\left(\frac{\pi}{3}\right),\ \sec\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right),\ \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\cot\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

$\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ কোণ বা পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$:

ধরি, কোনো ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA তার আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে প্রথম চতুর্ভাগে $\angle XOA = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। আবার অপর একটি রশ্মি OA' আদি অবস্থান OX থেকে একইদিকে ঘুরে $\angle XOY = \frac{\pi}{2}$ কোণ উৎপন্ন করার পর OY অবস্থান থেকে ঘড়ির কাঁটার

দিকে ঘুরে $\angle YOA' = -\theta$ কোণ উৎপন্ন করে (নিচের চিত্র)।



তাহলে, $\angle XOA' = \frac{\pi}{2} + (-\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta$

OP এবং OQ সমান দূরত্ব ধরে P ও Q বিন্দুদ্বয় থেকে OX এর উপর PM ও QN লম্বদ্বয় আঁকি। এখন $\triangle POM$ ও $\triangle QON$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের $\angle OMP = \angle ONQ$, $\angle POM = \angle OQN$ এবং $OP = OQ$.

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore ON = PM$ এবং $QN = OM$

এখন P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে

$OM = x$, $PM = y$

$\therefore ON = y$, $QN = x$

$\therefore Q$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (y, x)

তাহলে $\triangle NOQ$ এর ক্ষেত্রে আমরা পাই,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{x}{r} = \cos\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{x}{y} = \cot\theta$$

একইভাবে, $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta,\ \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$$

মন্তব্য: যেকোনো কোণ θ এর জন্য উপরিউক্ত সম্পর্কগুলো প্রযোজ্য।

উদাহরণ ১৮. $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$

$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\frac{\pi}{3}$, $\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}$

লক্ষণীয়: θ এবং $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ কোণ দুইটি পরস্পর পূরক (Complement Angle)। এদের একটির sine অপরটির cosine, একটির tangent অপরটির cotangent এবং একটির secant অপরটির cosecant এর সমান।

$\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$:

ধরি, ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA এর আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে প্রথম চতুর্ভাগে $\angle XOA = \theta$ এবং একই দিকে আরও ঘুরে $\angle AOA' = \frac{\pi}{2}$ কোণ উৎপন্ন করে (নিচের চিত্র)।

তাহলে, $\angle XOA = \angle YOA' = \theta$ এবং $\angle XOA' = \dfrac{\pi}{2} + \theta.$

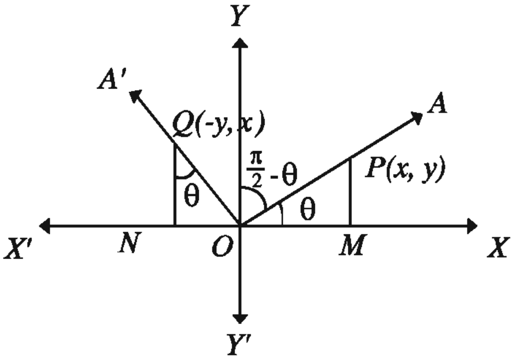
মনে করি, OA রশ্মির উপর $P(x, y)$ যেকোনো বিন্দু। OA' এর উপর Q বিন্দুটি এমনভাবে নিই যেন $OP = OQ$ হয়। P ও Q বিন্দু থেকে x-অক্ষের উপর PM ও QN লম্ব টানি।

$\therefore\ \angle NQO = \angle YOQ = \angle POM = \theta$

এখন সমকোণী ত্রিভুজ $\triangle POM$ ও $\triangle QON$ এর মধ্যে $\angle POM = \angle NQO$, $\angle PMO = \angle QNO$ এবং $OP = OQ = r$

$\therefore \triangle POM$ ও $\triangle QON$ সর্বসম।

$\therefore ON = PM, QN = OM$



এখন P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $ON = -PM = -y$ এবং $QN = OM = x$

$\therefore Q$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $Q(-y, x)$

তাহলে আমরা পাই,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{x}{r} = \cos\theta,\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\cot\theta$$

একইভাবে, $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = \sec\theta,\ \sec\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{cosec}\theta$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan\theta$$

মন্তব্য: যেকোনো কোণ θ এর জন্য উপরিউক্ত সম্পর্কগুলো প্রযোজ্য।

উদাহরণ ১৯. $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

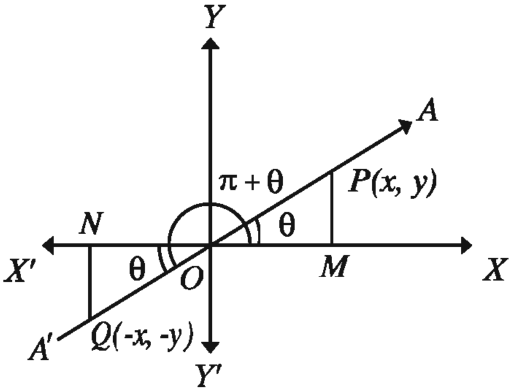
$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

কাজ: $\sec\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ এবং $\cot\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

$(\pi + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$:

ধরি ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে প্রথম চতুর্ভাগে $\angle XOA = \theta$ এবং একই দিকে আরও ঘুরে তৃতীয় চতুর্ভাগে $\angle AOA' = \pi$ কোণ উৎপন্ন করে (নিচের চিত্র)। তাহলে $\angle XOA' = (\pi + \theta)$.



এখন OA রশ্মির উপর যেকোনো বিন্দু P এবং OA' এর উপর Q বিন্দুটি এমনভাবে নিই যেন, $OP = OQ = r$ হয়। P ও Q হতে x-অক্ষের উপর PM ও QN লম্ব টানি।

$\triangle POM$ ও $\triangle QON$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle OMP = \angle ONQ$, $\angle POM = \angle QON$ এবং $OP = OQ = r$. সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore PM = QN$ এবং $OM = ON$

এখন P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে, $ON = -x$, $NQ = -y$

$\therefore Q$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-x, -y)$

অর্থাৎ, $\sin(\pi + \theta) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\theta$

$\cos(\pi + \theta) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos\theta,\ \tan(\pi + \theta) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan\theta$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(\pi + \theta) = -\operatorname{cosec}\theta$

$\sec(\pi + \theta) = -\sec\theta,\ \cot(\pi + \theta) = \cot\theta$

মন্তব্য: যেকোনো কোণ θ এর জন্য উপরিউক্ত সম্পর্কগুলো প্রযোজ্য।

উদাহরণ ২০. $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

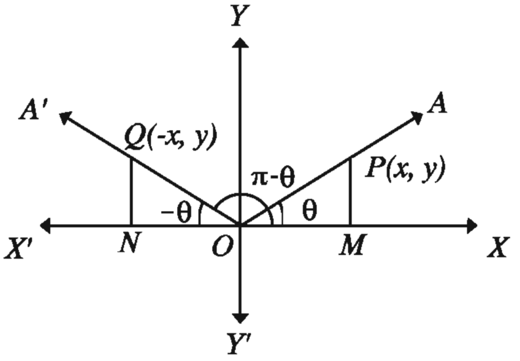
$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

কাজ: $\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, $\operatorname{cosec}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $\cot\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

$(\pi-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$:

ধরি ঘূর্ণায়মান রশ্মি OA আদি অবস্থান OX থেকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে $\angle XOA = \theta$ কোণ উৎপন্ন করে। রশ্মিটি একই দিকে আরও ঘুরে $\angle XOX' = \pi$ কোণ উৎপন্ন করার পর OX' থেকে ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরে $\angle X'OA' = -\theta$ কোণ উৎপন্ন করে (নিচের চিত্র)। তাহলে $\angle XOA' = \pi + (-\theta) = \pi - \theta$.



OA রশ্মির উপর P যেকোনো বিন্দু এবং OA' এর উপর Q যেকোন বিন্দু নিই যেন, $OP = OQ = r$ হয়।
এখন $\triangle OMP$ ও $\triangle ONQ$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে $\angle OMP = \angle ONQ$, $\angle POM = \angle QON$ এবং $OP = OQ = r$. সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম এবং $ON = OM$, $QN = PM$.
এখন P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হলে $OM = x$, $PM = y$
$\therefore ON = -x$, $NQ = y$
$\therefore Q$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $Q(-x, y)$

তাহলে, $\sin(\pi-\theta) = \dfrac{y}{r} = \sin\theta$, $\cos(\pi-\theta) = \dfrac{-x}{r} = -\dfrac{x}{r} = -\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta) = \dfrac{y}{-x} = -\dfrac{y}{x} = -\tan\theta$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}(\pi-\theta) = \operatorname{cosec}\theta$

$\sec(\pi-\theta) = -\sec\theta$, $\cot(\pi-\theta) = -\cot\theta$

মন্তব্য: যেকোনো কোণ θ এর জন্য উপরিউক্ত সম্পর্কগুলো প্রযোজ্য।

উদাহরণ ২১. $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

কাজ: $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\sec\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $\cot\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

লক্ষণীয়: θ এবং $(\pi-\theta)$ কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক। সম্পূরক কোণের sine ও cosecant সমান ও একই চিহ্নবিশিষ্ট। কিন্তু cosine, secant, tangent ও cotangent সমান ও বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট।

$\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$:

পূর্ববর্তী আলোচনার সাপেক্ষে পাওয়া যায়:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\cos\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=\tan\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sec\theta$

$\sec\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\operatorname{cosec}\theta,\ \cot\left(\dfrac{3\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta.$

মন্তব্য: যেকোনো কোণ θ এর জন্য উপরিউক্ত সম্পর্কগুলো প্রযোজ্য।

$(2\pi-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$:

প্রমিত বা আদর্শ অবস্থানে $(2\pi-\theta)$ কোণের অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকে এবং $(-\theta)$ কোণের সাথে মিলে যায়। তাই $(-\theta)$ ও $(2\pi-\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমান।

$\therefore \sin(2\pi-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta,\ \cos(2\pi-\theta)=\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\tan(2\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta,\ \operatorname{cosec}(2\pi-\theta)=\operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta$

$\sec(2\pi-\theta)=\sec(-\theta)=\sec\theta$ এবং $\cot(2\pi-\theta)=\cot(-\theta)=-\cot\theta$

মন্তব্য: যেকোনো কোণ θ এর জন্য উপরিউক্ত সম্পর্কগুলো প্রযোজ্য।

$(2\pi+\theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$:

প্রমিত বা আদর্শ অবস্থানে $(2\pi+\theta)$ কোণের অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে থাকায় θ কোণের ও $(2\pi+\theta)$ কোণের অনুপাতসমূহ একই হবে।

$\therefore \sin(2\pi+\theta)=\sin\theta,\ \cos(2\pi+\theta)=\cos\theta$

$\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta,\ \operatorname{cosec}(2\pi+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$

$\sec(2\pi+\theta)=\sec\theta,\ \cot(2\pi+\theta)=\cot\theta.$

মন্তব্য: যেকোনো কোণ θ এর জন্য উপরিউক্ত সম্পর্কগুলো প্রযোজ্য।

$\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$:

$\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)$ কোণের জন্য $\dfrac{3\pi}{2}+\theta=2\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$\therefore \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\sin\left\{2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cot\theta$$

অনুরূপভাবে, $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\sec\theta$

$$\sec\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=\operatorname{cosec}\theta,\ \cot\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$$

মন্তব্য: যেকোনো কোণ θ এর জন্য উপরিউক্ত সম্পর্কগুলো প্রযোজ্য।

যেকোনো কোণের অর্থাৎ, $\left(n\times\dfrac{\pi}{2}\pm\theta\right)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয়ের পদ্ধতি $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$:

নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে যেকোনো ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাতসমূহ নির্ণয় করা যায়।

ধাপ ১. প্রথমে প্রদত্ত কোণকে দুইভাগে ভাগ করতে হবে যার একটি অংশ $\dfrac{\pi}{2}$ বা $\dfrac{\pi}{2}$ এর n গুণিতক এবং অপরটি সূক্ষকোণ। অর্থাৎ প্রদত্ত কোণকে $\left(n\times\dfrac{\pi}{2}\pm\theta\right)$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।

ধাপ ২. n জোড় সংখ্যা হলে অনুপাতের ধরণ একই থাকবে অর্থাৎ sine অনুপাত sine থাকবে, cosine অনুপাত cosine থাকবে ইত্যাদি।

n বিজোড় সংখ্যা হলে sine, tangent ও secant অনুপাতগুলো যথাক্রমে cosine, cotangent ও cosecant এ পরিবর্তিত হবে। একইভাবে, cosine, cotangent ও cosecant যথাক্রমে sine, tangent ও secant এ পরিবর্তিত হবে।

ধাপ ৩. $\left(n\times\dfrac{\pi}{2}\pm\theta\right)$ কোণের অবস্থান কোন চতুর্ভাগে সেটা জানার পর ঐ চতুর্ভাগে প্রদত্ত অনুপাতের যে চিহ্ন সেই চিহ্ন ধাপ ২ থেকে নিরূপিত অনুপাতের পূর্বে বসাতে হবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য: এখানে বর্ণিত পদ্ধতির সাহায্যে যেকোনো ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় সম্ভব বলে শিক্ষার্থীদের এই পদ্ধতিতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ের জন্য উপদেশ দেওয়া হলো।

উদাহরণ ২২. $\sin\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)$ কোণের ক্ষেত্রে $n = 9$ একটি বিজোড় সংখ্যা তাই sin পরিবর্তিত হয়ে cos হবে। আবার, $\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)$ দশম বা দ্বিতীয় চতুর্ভাগে থাকে ফলে sin এর চিহ্ন ধনাত্মক।

$\therefore \sin\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$

$\sin\left(\frac{9\pi}{2}-\theta\right)$ এর ক্ষেত্রে $n = 9$ বিজোড় এবং $\left(\frac{9\pi}{2}-\theta\right)$ নবম বা প্রথম চতুর্ভাগে থাকায় sin এর চিহ্ন ধনাত্মক।

$\therefore \sin\left(\frac{9\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$

$\tan\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)$ এর ক্ষেত্রে $n = 9$ বিজোড় বলে tan হবে cot এবং $\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right)$ দশম বা দ্বিতীয় চতুর্ভাগে থাকায় tan এর চিহ্ন ঋণাত্মক।

$\therefore \tan\left(\frac{9\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta$

একইভাবে, $\tan\left(\frac{9\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$

কাজ: $\sin\left(\frac{11\pi}{2}\pm\theta\right)$, $\cos(11\pi\pm\theta)$, $\tan\left(\frac{17\pi}{2}\pm\theta\right)$, $\cot(18\pi\pm\theta)$, $\sec\left(\frac{19\pi}{2}\pm\theta\right)$ এবং $\operatorname{cosec}(8\pi\pm\theta)$ অনুপাতসমূহকে θ কোণের অনুপাতে প্রকাশ কর।

উদাহরণ ২৩. মান নির্ণয় কর।

ক) $\sin(10\pi+\theta)$

খ) $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

গ) $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

ঘ) $\cot\left(\theta-\frac{9\pi}{2}\right)$

ঙ) $\sec\left(-\frac{17\pi}{2}\right)$

সমাধান:

ক) $\sin(10\pi+\theta) = \sin(20\times\frac{\pi}{2}+\theta)$

এখানে $n = 20$ এবং $\sin(20\times\frac{\pi}{2}+\theta)$ কোণটি 21 তম বা প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore \sin(10\pi+\theta) = \sin\theta$

খ) $\cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(12 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

এখানে $n = 12$ এবং $\frac{19\pi}{3}$ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore \cos\left(\frac{19\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

গ) $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(4 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

এখানে $n = 4$ এবং $\frac{11\pi}{6}$ চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore \tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

ঘ) $\cot\left(\theta - \frac{9\pi}{2}\right) = \cot\left\{-\left(\frac{9\pi}{2} - \theta\right)\right\} = -\cot\left(9 \times \frac{\pi}{2} - \theta\right)$

এখানে $n = 9$ এবং $\frac{9\pi}{2} - \theta$ প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore \cot\left(\theta - \frac{9\pi}{2}\right) = -(\tan\theta) = -\tan\theta$

ঙ) $\sec\left(-\frac{17\pi}{2}\right) = \sec\left(\frac{17\pi}{2}\right)$ $[\because \sec(-\theta) = \sec\theta]$

$= \sec\left(17 \times \frac{\pi}{2} + 0\right)$

এখানে $n = 17$ এবং $\frac{17\pi}{2}$, y অক্ষের উপরে অবস্থিত।

$\therefore \sec\left(-\frac{17\pi}{2}\right) = \text{cosec}0$, অসংজ্ঞায়িত

উদাহরণ ২৪. মান নির্ণয় কর:

$\sin\frac{11}{90}\pi + \cos\frac{1}{30}\pi + \sin\frac{101}{90}\pi + \cos\frac{31}{30}\pi + \cos\frac{5}{3}\pi$

সমাধান:

$\sin\frac{11}{90}\pi + \cos\frac{1}{30}\pi + \sin\frac{101}{90}\pi + \cos\frac{31}{30}\pi + \cos\frac{5}{3}\pi$

$= \sin\frac{22}{180}\pi + \cos\frac{6}{180}\pi + \sin\frac{202}{180}\pi + \cos\frac{186}{180}\pi + \cos\frac{300}{180}\pi$

$= \sin\frac{22}{180}\pi + \cos\frac{6}{180}\pi + \sin(\pi + \frac{22}{180}\pi) + \cos(\pi + \frac{6}{180}\pi) + \cos(2\pi - \frac{60}{180}\pi)$

$$= \sin\frac{22}{180}\pi + \cos\frac{6}{180}\pi - \sin\frac{22}{180}\pi - \cos\frac{6}{180}\pi + \cos\frac{60}{180}\pi$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2}$$

কাজ: মান নির্ণয় কর:

$$\cos^2\frac{\pi}{15} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \cos^2\frac{16\pi}{15} + \cos^2\frac{47\pi}{30}$$

উদাহরণ ২৫. $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{51}{26}$

সমাধান: $\tan\theta = \frac{5}{12}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক হওয়ায় θ কোণের অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে।

অর্থাৎ, $\tan\theta = \frac{5}{12} = \frac{y}{x}$

$\therefore x = 12, y = 5$

$\therefore r = \sqrt{(12)^2 + (5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$

$\therefore \sin\theta = \frac{-y}{r} = -\frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{-x}{r} = \frac{-12}{13}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{13}{12}$

$$\therefore \frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} \qquad [\because \cos(-\theta) = \cos\theta, \sec(-\theta) = \sec\theta]$$

$$= \frac{-\frac{5}{13} - \frac{12}{13}}{-\frac{13}{12} + \frac{5}{12}} = \frac{-\frac{17}{13}}{-\frac{8}{12}} = \frac{17}{13} \times \frac{12}{8} = \frac{51}{26}$$ [প্রমাণিত]

উদাহরণ ২৬. $\tan\theta = -\sqrt{3}, \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$ হলে θ এর মান কত?

সমাধান: $\tan\theta$ ঋণাত্মক হওয়ায় θ এর অবস্থান দ্বিতীয় বা চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকবে।

দ্বিতীয় চতুর্ভাগে $\tan\theta = -\sqrt{3} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{2\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$

এটি গ্রহণযোগ্য মান। কারণ $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$

আবার, চতুর্থ চতুর্ভাগে $\tan\theta = -\sqrt{3} = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\frac{5\pi}{3}$

$\therefore \theta = \dfrac{5\pi}{3}$

এটিও গ্রহণযোগ্য মান। কারণ $\dfrac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$\therefore \theta$ এর মান $\dfrac{2\pi}{3}$ ও $\dfrac{5\pi}{3}$

উদাহরণ ২৭. সমাধান কর: $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ হলে $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

সমাধান: $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta \implies \sin^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0 \implies \left(\sqrt{2}\cos\theta - 1\right)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{4}$

নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

উদাহরণ ২৮. $0 < \theta < 2\pi$ ব্যবধিতে সমীকরণটির সমাধান কর: $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

সমাধান: $\sin^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta - \cos^2\theta = \cos\theta$

বা, $1 - 2\cos^2\theta - \cos\theta = 0 \implies 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$

$\therefore 2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা $\cos\theta + 1 = 0$

অর্থাৎ, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ অথবা $\cos\theta = -1$

অর্থাৎ, $\cos\theta = \cos\dfrac{\pi}{3}$ অথবা $\cos\theta = \cos\pi$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}, \pi$

যেহেতু $0 < \theta < 2\pi$ সেহেতু উভয় মান গ্রহণযোগ্য।

২০১৫ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \dfrac{\pi}{3}, \pi$

কাজ: $2\left(\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta$ সমীকরণটি সমাধান কর, যেখানে $0<\theta<2\pi$

উদাহরণ ২৯. $A=\dfrac{\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta-1}{\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta+1}$ এবং $B=\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta$

- ক) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ হলে দেখাও যে, $B=\sqrt{3}$
- খ) প্রমাণ কর যে, $A^2-B^2=0$
- গ) $B=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ এবং $0<\theta\leq 2\pi$ হলে θ এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) $B=\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta=\cot\dfrac{\pi}{3}+\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{3}\ [\because \theta=\dfrac{\pi}{3}]$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

খ) $A=\dfrac{\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta-1}{\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta+1}$

$$=\frac{\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta-(\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta)}{\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta+1}\ [\because \operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta=1]$$

$$=\frac{\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta-(\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta-\cot\theta)}{\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta+1}$$

$$=\frac{(\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta)(1-\operatorname{cosec}\theta+\cot\theta)}{\cot\theta-\operatorname{cosec}\theta+1}=\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta=B$$

$\therefore A^2=B^2$

$\therefore A^2-B^2=0$

গ) $B=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\cot\theta+\operatorname{cosec}\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \implies \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}+\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\dfrac{\cos\theta+1}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \implies \sqrt{3}(\cos\theta+1)=\sin\theta$

বা, $3(\cos^2\theta+2\cos\theta+1)=\sin^2\theta$ [বর্গ করে]

বা, $3\cos^2\theta+6\cos\theta+3=1-\cos^2\theta$

বা, $4\cos^2\theta+6\cos\theta+2=0 \implies 2\cos^2\theta+3\cos\theta+1=0$

বা, $2\cos^2\theta+2\cos\theta+\cos\theta+1=0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 1) + 1(\cos\theta + 1) = 0 \implies (\cos\theta + 1)(2\cos\theta + 1) = 0$

$\therefore \cos\theta + 1 = 0$ অথবা, $2\cos\theta + 1 = 0$

অর্থাৎ, $\cos\theta = -1$ অথবা, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

অর্থাৎ, $\cos\theta = \cos\pi$ অথবা, $\cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

অর্থাৎ, $\theta = \pi$ অথবা, $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$; কিন্তু $\theta = \pi$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

অনুশীলনী ৮.৩

১. $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে $\sin 2A$ এর মান কত ?

ক) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ খ) $\frac{1}{2}$ গ) 1 ঘ) $\sqrt{2}$

২. $-300°$ কোণটি কোন চতুর্ভাগে থাকবে ?

ক) প্রথম খ) দ্বিতীয় গ) তৃতীয় ঘ) চতুর্থ

৩. $\sin\theta + \cos\theta = 1$ হলে θ এর মান হবে

(i) $0°$ (ii) $30°$ (iii) $90°$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) ii গ) i ও ii ঘ) i ও iii

৪.

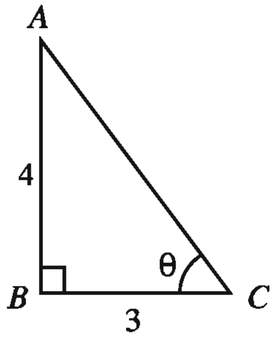
পাশের চিত্র অনুসারে

(i) $\tan\theta = \frac{4}{3}$

(ii) $\sin\theta = \frac{5}{3}$

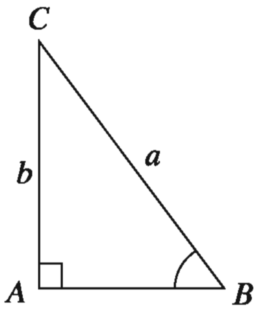
(iii) $\cos^2\theta = \frac{9}{25}$

নিচের কোনটি সঠিক?



ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii

নিচের চিত্রের আলোকে ৫ ও ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৫. $\sin B + \cos C =$ কত?

ক) $\dfrac{2b}{a}$ খ) $\dfrac{2a}{b}$ গ) $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$ ঘ) $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$

৬. $\tan B$ এর মান কোনটি?

ক) $\dfrac{a}{a^2-b^2}$ খ) $\dfrac{b}{a^2-b^2}$

গ) $\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$ ঘ) $\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

৭. মান নির্ণয় কর:

ক) $\sin 7\pi$ খ) $\cos\dfrac{11\pi}{2}$ গ) $\cot 11\pi$

ঘ) $\tan\left(-\dfrac{23\pi}{6}\right)$ ঙ) $\operatorname{cosec}\dfrac{19\pi}{3}$ চ) $\sec\left(-\dfrac{25\pi}{2}\right)$

ছ) $\sin\dfrac{31\pi}{6}$ জ) $\cos\left(-\dfrac{25\pi}{6}\right)$

৮. প্রমাণ কর যে,

ক) $\cos\dfrac{17\pi}{10} + \cos\dfrac{13\pi}{10} + \cos\dfrac{9\pi}{10} + \cos\dfrac{\pi}{10} = 0$

খ) $\tan\dfrac{\pi}{12}\tan\dfrac{5\pi}{12}\tan\dfrac{7\pi}{12}\tan\dfrac{11\pi}{12} = 1$

গ) $\sin^2\dfrac{\pi}{7} + \sin^2\dfrac{5\pi}{14} + \sin^2\dfrac{8\pi}{7} + \sin^2\dfrac{9\pi}{14} = 2$

ঘ) $\sin\dfrac{7\pi}{3}\cos\dfrac{13\pi}{6} - \cos\dfrac{5\pi}{3}\sin\dfrac{11\pi}{6} = 1$

ঙ) $\sin\dfrac{13\pi}{3}\cos\dfrac{13\pi}{6} - \sin\dfrac{11\pi}{6}\cos\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = 1$

চ) $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে দেখাও যে, $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \dfrac{14}{5}$

৯. মান নির্ণয় কর:

ক) $\cos\frac{9\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{31\pi}{36}-\sin\frac{5\pi}{36}$

খ) $\cot\frac{\pi}{20}\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}\cot\frac{9\pi}{20}$

গ) $\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{3\pi}{4}+\sin^2\frac{5\pi}{4}+\sin^2\frac{7\pi}{4}$

ঘ) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

ঙ) $\sin^2\frac{17\pi}{18}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{37\pi}{18}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$

১০. $\theta=\frac{\pi}{3}$ হলে নিম্নোক্ত অভেদসমূহ যাচাই কর:

ক) $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

খ) $\sin3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

গ) $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

ঘ) $\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

১১. প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে α (আলফা) এর মান নির্ণয় কর:

ক) $\cot\alpha=-\sqrt{3},\ \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

খ) $\cos\alpha=-\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

গ) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

ঘ) $\cot\alpha=-1,\ \pi<\alpha<2\alpha$

১২. সমাধান কর: (যখন $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

ক) $2\cos^2\theta=1+2\sin^2\theta$

খ) $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$

গ) $6\sin^2\theta-11\sin\theta+4=0$

ঘ) $\tan\theta+\cot\theta=\frac{4}{\sqrt{3}}$

ঙ) $2\sin^2\theta+3\cos\theta=3$

১৩. সমাধান কর: (যখন $0<\theta<2\pi$)

ক) $2\sin^2\theta+3\cos\theta=0$

খ) $4(\cos^2\theta+\sin\theta)=5$

গ) $\cot^2\theta+\mathrm{cosec}^2\theta=3$

ঘ) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=2$

ঙ) $\sec^2\theta+\tan^2\theta=\frac{5}{3}$

চ) $5\mathrm{cosec}^2\theta-7\cot\theta\,\mathrm{cosec}\theta-2=0$

ছ) $2\sin x\cos x=\sin x\ (0\leq x\leq 2\pi)$

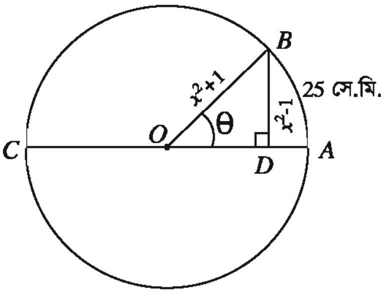
১৪. পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। ঢাকা ও পঞ্চগড় পৃথিবীর কেন্দ্রে 3.5° কোণ উৎপন্ন করে। শীতকালে একজন মানুষ পঞ্চগড়ের অপরূপ নৈসর্গিক দৃশ্য দেখতে চায়। সে 0.84 মিটার ব্যাস বিশিষ্ট চাকাওয়ালা একটি গাড়ী নিয়ে গেল।

ক) পৃথিবীর কেন্দ্রে ঢাকা ও পঞ্চগড়ের থেকে অঙ্কিত ব্যাসার্ধ কত রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে?

খ) ঢাকা এবং পঞ্চগড়ের দূরত্ব নির্ণয় কর।

গ) ঢাকা হতে পঞ্চগড় আসা যাওয়ার ক্ষেত্রে গাড়ীর প্রতিটি চাকা কতবার ঘুরবে?

১৫.



ক) চিত্রে ABC একটি বৃত্তাকার চাকা এবং চাকাটির AB চাপের দৈর্ঘ্য 25 সে.মি. হলে θ এর মান কত? চাকাটি 1 বার ঘুরে কত মিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে?

খ) ABC চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 5 বার আবর্তিত হলে চাকাটির গতিবেগ ঘন্টায় কত হবে?

গ) চিত্রে $\triangle BOD$ হতে $\sin\theta$ এর মান ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

১৬. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সবচেয়ে ছোট বাহুর দৈর্ঘ্য 7 সেমি এবং সবচেয়ে ছোট কোণের পরিমাণ 15° হলে তার অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত?

অধ্যায় ৯

সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন (Exponential and Logarithmic Function)

সমসাময়িক বাস্তবতায় সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশনের অনেক প্রয়োগ বিধায় এর চর্চা অব্যাহত রয়েছে। যেমন জনসংখ্যা বৃদ্ধি, চক্রবৃদ্ধি মুনাফা ইত্যাদিতে উভয় ফাংশনের প্রয়োগ বিদ্যমান।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা -

- ▶ মূলদ সূচক ও অমূলদ সূচক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ মূলদ ও অমূলদ সূচকের জন্য বিভিন্ন সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ▶ সূচক ও লগারিদমের পারস্পরিক সম্পর্ক ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ লগারিদমের বিভিন্ন সূত্র প্রমাণ ও প্রয়োগ করতে পারবে।
- ▶ লগারিদমের ভিত্তি পরিবর্তন করতে পারবে।
- ▶ সূচকীয়, লগারিদমীয় ও পরমমান ফাংশনের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে এবং গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- ▶ ফাংশনসমূহের লেখচিত্র অঙ্কনে আগ্রহী হবে।
- ▶ সূচকীয়, লগারিদমীয় ও পরমমান ফাংশনসমূহকে লেখচিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন করতে পারবে।
- ▶ ক্যালকুলেটরের সাহায্যে লগ ও প্রতিলগ নির্ণয় করতে পারবে।

মূলদ ও অমূলদ সূচক

নবম-দশম শ্রেণির গণিতে আলোচিত কিছু বিষয় যা এ অধ্যায়ের আলোচনার স্বার্থে উল্লেখ করা হলো:

R সকল বাস্তব সংখ্যার সেট

N সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট

Z সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট

Q সকল মূলদ সংখ্যার সেট নির্দেশ করে।

ধরি a একটি পূর্ণ সংখ্যা বা ভগ্নাংশ যা ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হতে পারে এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। তাহলে a কে n বার গুণ করলে গুণফলটিকে লিখা হয় $a^n = a \cdot a \cdot a \cdots$ (n বার) এবং a^n কে বলা হয় a এর n ঘাত। এরূপ ক্ষেত্রে a কে বলা হয় নিধান বা ভিত্তি (base) এবং n কে বলা হয় a এর ঘাত বা সূচক (exponent)।

সুতরাং 3^4 এর ক্ষেত্রে ভিত্তি 3 এবং সূচক 4।

আবার $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ এর ক্ষেত্রে ভিত্তি $\frac{2}{3}$ এর সূচক 4।

সংজ্ঞা: সকল $a \in R$ এর জন্য

১. $a^1 = a$

২. $a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$ (n সংখ্যক উৎপাদক), যেখানে $n \in N, n > 1$

অমূলদ সূচক

অমূলদ সূচকের ক্ষেত্রে $a^x (a > 0)$ এর মান এমনভাবে নির্দিষ্ট করা হয় যে, x এর মূলদ আসন্ন মান p এর জন্য a^p এর মান a^x এর মানের আসন্ন হয়। উদাহরণস্বরূপ $3^{\sqrt{5}}$ সংখ্যাটি বিবেচনা করি। আমরা জানি, $\sqrt{5}$ একটি অমূলদ সংখ্যা এবং $\sqrt{5} = 2.236067977\cdots$ (এই মান ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে পাওয়া গিয়েছে এবং দশমিক বিস্তার যে অনন্ত তা $\cdots$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে)। $\sqrt{5}$ এর মান হিসেবে

$p_1 = 2.23$ $p_2 = 2.236$ $p_3 = 2.2360$ $p_4 = 2.23606$ $p_5 = 2.236067$
$p_6 = 2.2360679$ $p_7 = 2.23606797$

বিবেচনা করে $3^{\sqrt{5}}$ এর মান হিসেবে

$q_1 = 3^{2.23} = 11.5872505$ $q_2 = 3^{2.236} = 11.6638822$ $q_3 = 3^{2.2360} = 11.6638822$

$q_4 = 3^{2.23606} = 11.66465109$ $q_5 = 3^{2.236067} = 11.6647407$

$q_6 = 3^{2.2360679} = 11.6647523$ $q_7 = 3^{2.23606797} = 11.6647532$

পাওয়া যায় (এই মানগুলোও ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে পাওয়া গিয়েছে)।

বাস্তবিক পক্ষে, $3^{\sqrt{5}} = 11.6647533\cdots$

সূচক সম্পর্কিত সূত্র

সূত্র ১. $a \in R$ এবং $n \in N$ হলে $a^1 = a,\ a^{n+1} = a^n \cdot a.$

প্রমাণ: সংজ্ঞানুযায়ী $a^1 = a$ এবং $n \in N$ এর জন্য $a^{n+1} = \overbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots \cdot a}_{n \text{ সংখ্যক}} \cdot a}^{n+1 \text{ সংখ্যক}} = a^n \cdot a$

দ্রষ্টব্য: N সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট

সূত্র ২. $a \in R$ এবং $m, n \in N$ হলে $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

প্রমাণ: যেকোনো $m \in N$ নির্দিষ্ট করে এবং n কে চলক ধরে খোলা বাক্য $a^m \cdot a^n = a^{m+n} \cdots (1)$ বিবেচনা করি।

(1) এ $n = 1$ বসিয়ে পাই,

বামপক্ষ $= a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1} =$ ডানপক্ষ [সূত্র ১]

$\therefore n = 1$ এর জন্য (1) সত্য।

এখন ধরি, $n = k$ এর জন্য (1) সত্য। অর্থাৎ, $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$

তাহলে, $a^m \cdot a^{k+1} = a^m(a^k \cdot a)$ [সূত্র ১]

$= (a^m \cdot a^k) \cdot a$ [গুণের সহযোজন]

$= a^{m+k} \cdot a$ [আরোহ কল্পনা]

$= a^{m+k+1}$ [সূত্র ১]

অর্থাৎ, $n = k + 1$ এর জন্য (1) সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সকল $n \in N$ এর জন্য (1) সত্য।

$\therefore$ যেকোনো $m, n \in N$ এর জন্য $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ □

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

বর্ণিত সূত্রটিকে সূচকের মৌলিক সূত্র বলা হয়।

সূত্র ৩. $a \in R, a \neq 0$ এবং $m, n \in N, m \neq n$ হলে $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{যখন } m > n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}}, & \text{যখন } m < n \end{cases}$

প্রমাণ:

১. মনে করি, $m > n$ তাহলে $m - n \in N$

$\therefore a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$ [সূত্র ২]

$\therefore \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ [ভাগের সংজ্ঞা]

২. মনে করি, $m < n$ তাহলে $n - m \in N$

$\therefore a^{n-m} \cdot a^m = a^{(n-m)+m} = a^n$ [সূত্র ২]

$\therefore \dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ [ভাগের সংজ্ঞা]

দ্রষ্টব্য: সূত্রটি গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ কর [সূত্র ২ এর অনুরূপ]

সূত্র ৪. $a \in R$ এবং $m, n \in N$ হলে $(a^m)^n = a^{mn}$

সূত্র ৫. $a, b \in R$ এবং $n \in N$ হলে $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

[সূত্রদ্বয় আরোহ পদ্ধতিতে প্রমাণ কর]

শূন্য ও ঋণাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচক:

সংজ্ঞা: $a \in R, a \neq 0$ হলে,

৩. $a^0 = 1$

৪. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, যেখানে $n \in N$

মন্তব্য: সূচকের ধারণা সম্প্রসারণের সময় লক্ষ রাখা হয়, যেন সূচকের মৌলিক সূত্র $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ সকল ক্ষেত্রেই বৈধ থাকে।

সূত্রটি যদি $m = 0$ এর জন্য সত্য হয়, তবে $a^0 \cdot a^n = a^{0+n}$ অর্থাৎ, $a^0 = \dfrac{a^n}{a^n} = 1$ হতে হবে।

একইভাবে, সূত্রটি যদি $m = -n$ $(n \in N)$ এর জন্য সত্য হতে হয়,

তবে $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$ অর্থাৎ, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ হতে হবে। এদিকে লক্ষ রেখেই উপরের সংজ্ঞা বর্ণনা করা হয়েছে।

উদাহরণ ১. ক) $2^5 \cdot 2^6 = 2^{5+6} = 2^{11}$

খ) $\dfrac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2$

গ) $\dfrac{3^3}{3^5} = \dfrac{1}{3^{5-3}} = \dfrac{1}{3^2}$

ঘ) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^3 = \dfrac{5}{4} \times \dfrac{5}{4} \times \dfrac{5}{4} = \dfrac{5 \times 5 \times 5}{4 \times 4 \times 4} = \dfrac{5^3}{4^3}$

ঙ) $(4^2)^7 = 4^{2\times7} = 4^{14}$

চ) $(a^2b^3)^5 = (a^2)^5 \cdot (b^3)^5 = a^{2\times5} \cdot b^{3\times5} = a^{10}b^{15}$

উদাহরণ ২. ক) $6^0 = 1$

খ) $(-6)^0 = 1$

গ) $7^{-1} = \dfrac{1}{7}$

ঘ) $7^{-2} = \dfrac{1}{7^2} = \dfrac{1}{49}$

ঙ) $10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0.1$

চ) $10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100}$

উদাহরণ ৩. $m, n \in N$ হলে $(a^m)^n = a^{mn}$ সূত্রটির সত্যতা স্বীকার করে নিয়ে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$ যেখানে $a \neq 0$ এবং $m \in N$ এবং $n \in Z$

সমাধান: প্রমাণ করতে হবে, $(a^m)^n = a^{mn} \cdots (1)$

যেখানে, $a \neq 0$ এবং $m \in N$ এবং $n \in Z$

ধাপ ১. প্রথমে মনে করি, $n > 0$, এক্ষেত্রে (1) এর সত্যতা স্বীকার করে নেওয়া হয়েছে।

ধাপ ২. এখন মনে করি, $n = 0$ এক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^0 = 1$

এবং, $a^{mn} = a^0 = 1 [\because n = 0]$

$\therefore (1)$ সত্য।

ধাপ ৩. সবশেষে মনে করি, $n < 0$ এবং $n = -k$, যেখানে $k \in N$

এক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^{-k} = \dfrac{1}{(a^m)^k} = a^{-mk} = a^{m(-k)} = a^{mn}$

উদাহরণ ৪. দেখাও যে, সকল $m, n \in N$ এর জন্য $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, যেখানে $a \neq 0$

সমাধান: $m > n$ হলে, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ [সূত্র ৩]

$m < n$ হলে, $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ [সূত্র ৩]

$\therefore \dfrac{a^m}{a^n} = a^{-(n-m)}$ [সংজ্ঞা ৪]

$= a^{m-n}$

$m = n$ হলে, $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a^n}{a^n} = 1 = a^0$ [সংজ্ঞা ৩]

$= a^{m-m} = a^{m-n}$

দ্রষ্টব্য: উপরে বর্ণিত সূচকের সংজ্ঞাগুলো থেকে যেকোনো $m \in Z$ এর জন্য a^m এর ব্যাখ্যা পাওয়া যায়, যেখানে $a \neq 0$। সূচক ধনাত্মক অথবা শূন্য অথবা ঋণাত্মক ধরে সাধারণভাবে সকল পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য নিম্নোক্ত সূত্রটি প্রমাণ করা যায়।

সূত্র ৬. $a \neq 0,\ b \neq 0$ এবং $m,\ n \in Z$ হলে,

১. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

২. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

৩. $(a^m)^n = a^{mn}$

৪. $(ab)^n = a^n b^n$

৫. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

কাজ:

ক) গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$, যেখানে $a \in R$ এবং $n \in N$

খ) গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, যেখানে $a, b \in R$ এবং $n \in N$

গ) গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $\left(\dfrac{1}{a}\right)^n = \dfrac{1}{a^n}$ যেখানে, $a > 0$ এবং $n \in N$

অতঃপর $(ab)^n = a^n b^n$ সূত্র ব্যবহার করে দেখাও যে, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, যেখানে $a, b \in R, b > 0$ এবং $n \in N$

ঘ) $a \neq 0$ এবং $m, n \in Z$ ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ সূত্রটির সত্যতা স্বীকার করে দেখাও যে, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ যখন (১) $m > 0$ এবং $n < 0$ (২) $m < 0$ এবং $n < 0$।

মূল এর ব্যাখ্যা

সংজ্ঞা: $n \in N, n > 1$ এবং $a \in R$ হলে, যদি এমন $x \in R$ থাকে যেন $x^n = a$ হয়, তবে সেই x কে a এর একটি n তম মূল বলা হয়। $n = 2$ হলে মূলকে বর্গমূল এবং $n = 3$ হলে মূলকে ঘনমূল বলা হয়।

উদাহরণ ৫. ক) 2 এবং -2 উভয়ই 16-এর 4 তম মূল, কারণ $(2)^4 = 16$ এবং $(-2)^4 = 16$

খ) -27 এর ঘনমূল -3, কারণ $(-3)^3 = -27$

গ) 0 এর n তম মূল 0, কারণ সকল $n \in N, n > 1$ এর জন্য $0^n = 0$

ঘ) -9 এর কোনো বর্গমূল নেই, কারণ যে কোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গ অঋণাত্মক।

এখানে উল্লেখ্য যে,

(i) যদি $a > 0$ এবং $n \in N, n > 1$ হয়, তবে a এর একটি অনন্য ধনাত্মক, n তম মূল আছে। এই ধনাত্মক মূলকে $\sqrt[n]{a}$ দ্বারা সূচিত করা হয় ($\sqrt[2]{a}$ এর স্থলে $\sqrt{a}$ লেখা হয়) এবং একে a এর মুখ্য n তম মূল বলা হয়। n জোড় সংখ্যা হলে এরূপ a এর অপর একটি n তম মূল আছে এবং তা হলো $-\sqrt[n]{a}$

(ii) যদি $a < 0$ এবং $n \in N, n > 1$ বিজোড় সংখ্যা হয়, তবে a এর একটি মাত্র n তম মূল আছে যা ঋণাত্মক। এই মূলকে $-\sqrt[n]{a}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। n জোড় হলে এবং a ঋণাত্মক হলে a এর কোন n তম মূল নেই।

(iii) 0 এর n তম মূল $\sqrt[n]{0} = 0$

দ্রষ্টব্য:

১. $a > 0$ হলে $\sqrt[n]{a} > 0$

২. $a < 0$ এবং n বিজোড় হলে, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} < 0$ [যেখানে $|a|$ হচ্ছে a এর পরমমান]

উদাহরণ ৬. $\sqrt{4} = 2, (\sqrt{4} \neq -2),\ \sqrt[3]{-8} = -2 = -\sqrt[3]{8},$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{যখন } a \geq 0 \\ -a, & \text{যখন } a < 0 \end{cases}$$

সূত্র ৭. $a < 0, n \in N, n > 1$ এবং n বিজোড় হলে দেখাও যে, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$

প্রমাণ:

$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{-|a|}$ $[\because a < 0]$

$= \sqrt[n]{(-1)^n|a|}$ $[\because n$ বিজোড়$]$

$= -\sqrt[n]{|a|}$

সুতরাং, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$

উদাহরণ ৭. $-\sqrt[3]{27}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $-\sqrt[3]{27} = -\sqrt[3]{(3)^3} = -3$

সূত্র ৮. $a > 0, m \in Z$ এবং $n \in N, n > 1$ হলে, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

প্রমাণ: মনে করি, $\sqrt[n]{a} = x$ এবং $\sqrt[n]{a^m} = y$

তাহলে, $x^n = a$ এবং $y^n = a^m$

বা, $y^n = a^m = (x^n)^m = (x^m)^n$

যেহেতু $y > 0, x^m > 0$, সুতরাং মুখ্য n তম মূল বিবেচনা করে পাই, $y = x^m$

বা, $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

অর্থাৎ, $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

সূত্র ৯. যদি $a > 0$ এবং $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$ হয়, যেখানে $m, p \in Z$ এবং $n, q \in N, n > 1, q > 1$ তবে, $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$

প্রমাণ: এখানে, $qm = pn$

মনে করি, $\sqrt[n]{a^m} = x$ তাহলে, $x^n = a^m$

বা, $(x^n)^q = (a^m)^q$

বা, $x^{nq} = a^{mq} = a^{pn}$

বা, $(x^q)^n = (a^p)^n$

বা, $x^q = a^p$ [মুখ্য n তম মূল বিবেচনা করে]

বা, $x = \sqrt[q]{a^p}$

অর্থাৎ, $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$

অনুসিদ্ধান্ত ১. যদি $a > 0$ এবং $n,\ k \in N,\ n > 1$ হয়, তবে, $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$

মূলদ ভগ্নাংশ সূচক

সংজ্ঞা ৫: $a \in R$ এবং $n \in N,\ n > 1$ হলে, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ যখন $a > 0$ অথবা $a < 0$ এবং n বিজোড়।

মন্তব্য: সূচক নিয়ম $(a^m)^n = a^{mn}$ [সূত্র ৬]

যদি সকল ক্ষেত্রে সত্য হতে হয়, তবে $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$ হতে হবে, অর্থাৎ $a^{\frac{1}{n}}$ এর n তম মূল হতে হবে। এজন্য একাধিক মূলের ক্ষেত্রে দ্ব্যর্থতা পরিহারের লক্ষে উপরের সংজ্ঞা বর্ণনা করা হয়েছে।

মন্তব্য: $a < 0$ এবং $n \in N,\ n > 1$ বিজোড় হলে সূত্র ৭ থেকে দেখা যায় যে

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} = -|a|^{\frac{1}{n}}$

এরূপ ক্ষেত্রে এই সূত্রের সাহায্যেই $a^{\frac{1}{n}}$ এর মান নির্ণয় করা হয়।

মন্তব্য: a মূলদ সংখ্যা হলেও অধিকাংশ ক্ষেত্রে $a^{\frac{1}{n}}$ অমূলদ সংখ্যা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে $a^{\frac{1}{n}}$ এর আসন্ন মান ব্যবহার করা হয়।

সংজ্ঞা ৬: $a > 0, m \in Z$ এবং $n \in N, n > 1$ হলে $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m$

দ্রষ্টব্য: সংজ্ঞা ৫ ও ৬ এবং সূত্র ৮ থেকে দেখা যায় যে,

$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$ যেখানে, $a > 0, m \in Z$ এবং, $n \in N, n > 1$

সুতরাং, $p \in Z$ এবং $q \in Z, n > 1$ যদি এমন হয় যে, $\dfrac{m}{n} = \dfrac{p}{q}$ হয়, তবে সূত্র ৯ থেকে দেখা যায় যে, $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$

দ্রষ্টব্য: পূর্ণসংখ্যক সূচক ও মূলদ ভগ্নাংশ সূচকের সংজ্ঞা থেকে a^r এর ব্যাখ্যা পাওয়া যায়, যেখানে $a > 0$ এবং $r \in Q$। উপরের আলোচনা থেকে দেখা যায় যে, $a > 0$ হলে, r কে বিভিন্ন সমতুল ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা হলেও a^r এর মানের কোনো তারতম্য হয় না।

দ্রষ্টব্য: সূত্র ৬ এ বর্ণিত সূচক নিয়মগুলো সাধারণভাবে যেকোনো সূচকের জন্য সত্য হয়।

সূত্র ১০. $a > 0, b > 0$ এবং $r, s \in Q$ হলে

ক) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

খ) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

গ) $(a^r)^s = a^{rs}$

ঘ) $(ab)^r = a^r b^r$

ঙ) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

(ক) ও (ঘ) এর পুনঃপুন প্রয়োগের মাধ্যমে দেখা যায় যে,

অনুসিদ্ধান্ত ২. ক) $a > 0$ এবং $r_1,\ r_2, \cdots, r_k \in Q$ হলে,

$$a^{r_1} \cdot a^{r_2} \cdot a^{r_3} \cdots a^{r_k} = a^{r_1+r_2+r_3+\cdots+r_k}.$$

খ) $a_1 > 0, a_2 > 0, \cdots, a_n > 0$ এবং $r \in Q$ হলে $(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^r = a_1^r \cdot a_2^r \cdots a_n^r$.

উদাহরণ ৮. দেখাও যে, $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

যেখানে, $a > 0; m, p \in Z; n, q \in N, n > 1, q > 1$.

সমাধান: $\dfrac{m}{n}$ ও $\dfrac{p}{q}$ কে সমহরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করে দেখা যায় যে,

$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \cdot a^{\frac{np}{nq}} = (a^{\frac{1}{nq}})^{mq}(a^{\frac{1}{nq}})^{np}$ [সংজ্ঞা ৬ ব্যবহার করে]

$= (a^{\frac{1}{nq}})^{mq+np}$ [সূত্র ৬]

$= a^{\frac{mq+np}{nq}}$

$= a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}}$

$= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

কয়েকটি প্রয়োজনীয় তথ্য:

(i) যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$, তাহলে $x = 0$

(ii) যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $x \neq 0$, তাহলে $a = 1$

(iii) যদি $a^x = a^y$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$, তাহলে $x = y$

(iv) যদি $a^x = b^x$ হয়, যেখানে $\dfrac{a}{b} > 0$ এবং $x \neq 0$, তাহলে $a = b$

উদাহরণ ৯. যদি $a^x = b, b^y = c$ এবং $c^z = a$ হয়, তবে দেখাও যে, $xyz = 1$.

সমাধান: প্রদত্ত শর্ত হতে, $b = a^x, c = b^y$ এবং $a = c^z$

এখন, $b = a^x = (c^z)^x = c^{zx} = (b^y)^{zx} = b^{xyz}$

বা, $b = b^{xyz}$ বা, $b^1 = b^{xyz}$

$\therefore xyz = 1$

উদাহরণ ১০. যদি $a^b = b^a$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$ এবং এ থেকে প্রমাণ কর যে, $a = 2b$ হলে, $b = 2$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a^b = b^a$

$\therefore b = (a^b)^{\frac{1}{a}} = (a)^{\frac{b}{a}}$

বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{a^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{a}{b}} = \left(a^1 \cdot a^{-\frac{b}{a}}\right)^{\frac{a}{b}}$

$= a^{\frac{a}{b}} \cdot a^{-1} = a^{\frac{a}{b}-1} =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

পুনরায়, $a = 2b$ হলে

$\left(\frac{2b}{b}\right)^{\frac{2b}{b}} = (2b)^{\frac{2b}{b}-1}$

বা, $(2)^2 = (2b)^{2-1}$ বা, $4 = 2b$

$\therefore b = 2$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ১১. যদি $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$

বা, $(x^x)^{\sqrt{x}} = \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^x = \left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)^x = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^x = (x^x)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore (x^x)^{\sqrt{x}} = (x^x)^{\frac{3}{2}}$

বা, $\sqrt{x} = \frac{3}{2}$ বা, $x = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$

$\therefore x = \frac{9}{4}$

উদাহরণ ১২. যদি $a^x = b^y = c^z$ এবং $b^2 = ac$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$.

সমাধান: দেওয়া আছে, $a^x = b^y$ বা, $a = b^{\frac{y}{x}}$

আবার, $c^z = b^y$ বা, $c = b^{\frac{y}{z}}$

এখন, $b^2 = ac$ বা, $b^2 = b^{\frac{y}{x}} \cdot b^{\frac{y}{z}} = b^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$

বা, $2 = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{z}$

বা, $\dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z}$ [উভয়পক্ষকে y দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{y}$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ ১৩. প্রমাণ কর যে, $\left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} = 1.$

সমাধান: বামপক্ষ $= \left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \times \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} \times \left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}$

$= (x^{b-c})^{b+c} \times (x^{c-a})^{c+a} \times (x^{a-b})^{a+b}$

$= x^{b^2-c^2} \times x^{c^2-a^2} \times x^{a^2-b^2}$

$= x^{b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2}$

$= x^0 = 1 =$ ডানপক্ষ

উদাহরণ ১৪. যদি $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ এবং $abc = 1$ হয়, তবে দেখাও যে, $x + y + z = 0.$

সমাধান: ধরি, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$

তাহলে পাই, $a = k^x, b = k^y, c = k^z$

$\therefore abc = k^x \cdot k^y \cdot k^z = k^{x+y+z}$

দেওয়া আছে, $abc = 1$

$\therefore k^{x+y+z} = 1 = k^0$

$\therefore x + y + z = 0$

উদাহরণ ১৫. সরল কর $\dfrac{1}{1 + a^{y-z} + a^{y-x}} + \dfrac{1}{1 + a^{z-x} + a^{z-y}} + \dfrac{1}{1 + a^{x-y} + a^{x-z}}$

সমাধান: এখানে, $\dfrac{1}{1 + a^{y-z} + a^{y-x}} = \dfrac{a^{-y}}{a^{-y}(1 + a^{y-z} + a^{y-x})} = \dfrac{a^{-y}}{a^{-y} + a^{-z} + a^{-x}}$

একইভাবে, $\dfrac{1}{1 + a^{z-x} + a^{z-y}} = \dfrac{a^{-z}}{a^{-z}(1 + a^{z-x} + a^{z-y})} = \dfrac{a^{-z}}{a^{-z} + a^{-x} + a^{-y}}$

এবং $\dfrac{1}{1 + a^{x-y} + a^{x-z}} = \dfrac{a^{-x}}{a^{-x} + a^{-y} + a^{-z}}$

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}} + \dfrac{1}{1+a^{z-x}+a^{z-y}} + \dfrac{1}{1+a^{x-y}+a^{x-z}}$

$= \dfrac{a^{-y}}{a^{-y}+a^{-z}+a^{-x}} + \dfrac{a^{-z}}{a^{-z}+a^{-x}+a^{-y}} + \dfrac{a^{-x}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}$

$= \dfrac{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}}{a^{-x}+a^{-y}+a^{-z}} = 1$

উদাহরণ ১৬. যদি $a = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3 - 6a^2 + 6a - 2 = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

$\therefore\ a - 2 = 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$

বা, $(a-2)^3 = (2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}})^3 = 2^2 + 2 + 3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}(2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}) = 6 + 6(a-2)$ $[\because 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} = a - 2]$

বা, $a^3 - 3a^2 \cdot 2 + 3a \cdot 2^2 - 2^3 = 6 + 6a - 12$

বা, $a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = 6a - 6$

$\therefore a^3 - 6a^2 + 6a - 2 = 0$

উদাহরণ ১৭. সমাধান কর: $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 2^5 = 0$

সমাধান: $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 2^5 = 0$

বা, $(2^2)^x - 3 \cdot 2^x \cdot 2^2 + 32 = 0$

বা, $(2^x)^2 - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

বা, $y^2 - 12y + 32 = 0$ [মনে করি $2^x = y$]

বা, $y^2 - 4y - 8y + 32 = 0$ বা, $y(y-4) - 8(y-4) = 0$

বা, $(y-4)(y-8) = 0$

সুতরাং $y - 4 = 0$ অথবা, $y - 8 = 0$

বা, $2^x - 4 = 0$ $[\because 2^x = y]$ অথবা, $2^x - 8 = 0$ $[\because 2^x = y]$

বা, $2^x = 4 = 2^2$ অথবা, $2^x = 8 = 2^3$

$\therefore x = 2$ অথবা, $x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 2,\ 3$

কাজ:

ক) মান নির্ণয় কর:

(১) $\dfrac{5^{n+2}+35\times 5^{n-1}}{4\times 5^{n}}$ (২) $\dfrac{3^4\cdot 3^8}{3^{14}}$

খ) দেখাও যে, $\left(\dfrac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2}\times\left(\dfrac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2}\times\left(\dfrac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}=1.$

গ) যদি $a=xy^{p-1}$, $b=xy^{q-1}$ এবং $c=xy^{r-1}$ হয়, তবে দেখাও যে

$a^{q-r}\cdot b^{r-p}\cdot c^{p-q}=1$

ঘ) সমাধান কর:

(১) $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

(২) $9^{2x}=3^{x+1}$

(৩) $2^{x+3}+2^{x+1}=320$

ঙ) সরল কর:

(১) $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{(a^6)\sqrt{a^4}}}$

(২) $\left[1-1\{1-(1-x^3)^{-1}\}^{-1}\right]^{-1}$

চ) যদি $\sqrt[x]{a}=\sqrt[y]{b}=\sqrt[z]{c}$ এবং $abc=1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x+y+z=1.$

ছ) যদি $a^m\cdot a^n=(a^m)^n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $m(n-2)+n(m-2)=0.$

অনুশীলনী ৯.১

১. প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p=a^{\frac{mp}{n}}$, যেখানে $m,\ p\in Z$ এবং $n\in N$

২. প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}$, যেখানে $m,\ n\in Z,\ m\neq 0,\ n\neq 0$

৩. প্রমাণ কর যে, $\left(ab\right)^{\frac{m}{n}}=\left(a\right)^{\frac{m}{n}}\left(b\right)^{\frac{m}{n}}$ যেখানে $m\in Z, n\in N$

৪. দেখাও যে,

ক) $\left(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a-b$

খ) $\dfrac{a^3+a^{-3}+1}{a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{-3}{2}}+1}=a^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{-3}{2}}-1$

৫. সরল করঃ

ক) $$\frac{\left(\dfrac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}\times\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\dfrac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}\times\left(\dfrac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$$

খ) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^3}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$

গ) $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

ঘ) $\dfrac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p}+\dfrac{1}{1+b^{-n}c^p+b^{-n}a^m}+\dfrac{1}{1+c^{-p}a^m+c^{-p}b^n}$

ঙ) $\sqrt[bc]{\dfrac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}}\times\sqrt[ca]{\dfrac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}}\times\sqrt[ab]{\dfrac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$

চ) $\dfrac{(a^2-b^{-2})^a(a-b^{-1})^{b-a}}{(b^2-a^{-2})^b(b+a^{-1})^{a-b}}$

৬. দেখাও যে,

ক) যদি $x=a^{q+r}b^p,\ y=a^{r+p}b^q,\ z=a^{p+q}b^r$ হয়, তবে $x^{q-r}\cdot y^{r-p}\cdot z^{p-q}=1.$

খ) যদি $a^p=b,\ b^q=c$ এবং $c^r=a$ হয়, তবে $pqr=1.$

গ) যদি $a^x=p,\ a^y=q$ এবং $a^2=(p^yq^x)^z$ হয়, তবে $xyz=1.$

৭. ক) যদি $x\sqrt[3]{a}+y\sqrt[3]{b}+z\sqrt[3]{c}=0$ এবং $a^2=bc$ হয়, তবে দেখাও যে,
$ax^3+by^3+cz^3=3axyz.$

খ) যদি $x=(a+b)^{\frac{1}{3}}+(a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2-b^2=c^3$ হয়, তবে দেখাও যে,
$x^3-3cx-2a=0.$

গ) যদি $a=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $2a^3-6a=5.$

ঘ) যদি $a^2+2=3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{-2}{3}}$ এবং $a\geq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $3a^3+9a=8.$

ঙ) যদি $a^2=b^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{3}}.$

চ) যদি $b=1+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $b^3-3b^2-6b-4=0.$

ছ) যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1} = 1.$$

৮. ক) যদি $a^x = b,\ b^y = c$ এবং $c^z = 1$ হয়, তবে xyz এর মান নির্ণয় কর।

খ) যদি $x^a = y^b = z^c$ এবং $xyz = 1$ হয়, তবে $ab + bc + ca$ এর মান নির্ণয় কর।

গ) যদি $9^x = 27^y$ হয়, তবে $\dfrac{x}{y}$ এর মান নির্ণয় কর।

৯. সমাধান করঃ

ক) $3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$

খ) $5^x + 3^y = 8,\ 5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$

গ) $4^{3y-2} = 16^{x+y},\ 3^{x+2y} = 9^{2x+1}$

ঘ) $2^{2x+1} \cdot 2^{3y+1} = 8,\ 2^{x+2} \cdot 2^{y+2} = 16$

লগারিদম (Logarithm)

Logos এবং arithmas নামক দুটি গ্রিক শব্দ হতে Logarithm শব্দটির উৎপত্তি। Logos অর্থ আলোচনা এবং arithmas অর্থ সংখ্যা। সুতরাং Logarithm শব্দটির অর্থ সংখ্যা নিয়ে আলোচনা।

সংজ্ঞা: যদি $a^x = b$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ তবে x কে b এর a ভিত্তিক লগারিদম বলা হয় যেখানে $x = \log_a b$

অতএব, যদি $a^x = b$ হয়, তবে $x = \log_a b$

বিপরীতক্রমে, যদি $x = \log_a b$ হয়, তবে $a^x = b$

এক্ষেত্রে b সংখ্যাটিকে a এর সাপেক্ষে x এর প্রতিলগ (antilogarithm) বলে এবং আমরা লিখি, $b = \text{antilog}_a x$

অনেক সময় log ও প্রতি log এর ভিত্তি উহ্য রাখা হয়।

উদাহরণ ১৮. $\text{antilog} 2.82679 = 671.1042668$

$\text{antilog}(9.82672 - 10) = 0.671$

এবং $\text{antilog}(6.74429 - 10) = 0.000555$

দ্রষ্টব্য: বৈজ্ঞানিক ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে $\log a$ এর আসন্ন মান নির্ণয় করা যায় (এ সম্পর্কে নবম-দশম শ্রেণির বইতে বিস্তারিত বর্ণনা দেওয়া আছে)

সংজ্ঞানুসারে, আমরা পাই,

$\log_2 64 = 6$ যেহেতু $2^6 = 64$ এবং $\log_8 64 = 2$ যেহেতু $8^2 = 64$

সুতরাং, একই সংখ্যার লগারিদম ভিন্ন ভিন্ন ভিত্তির প্রেক্ষিতে ভিন্ন হয়। ধনাত্মক কিন্তু 1 নয় এমন যেকোনো সংখ্যাকে ভিত্তি ধরে একই সংখ্যার ভিন্ন ভিন্ন লগারিদম নির্ণয় করা যায়। যেকোনো ধনাত্মক

সংখ্যাকে লগারিদমের ভিত্তি হিসাবে গণ্য করা যায়। শূন্য বা কোন ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম নির্ণয় করা যায় না।

দ্রষ্টব্য: $a > 0, a \neq 1$ এবং $b \neq 0$ হলে b এর অনন্য a ভিত্তিক লগারিদমকে $\log_a b$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

সুতরাং,

ক) $\log_a b = x$ যদি এবং কেবল যদি $a^x = b$ হয়। (ক) থেকে দেখা যায় যে,

খ) $\log_a(a^x) = x$

গ) $a^{\log_a b} = b$

উদাহরণ ১৯. ক) $4^2 = 16 \implies \log_4(16) = 2$

খ) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \implies \log_5(\frac{1}{25}) = -2$

গ) $10^3 = 1000 \implies \log_{10}(1000) = 3$

ঘ) $7^{\log_7 9} = 9 \qquad [\because a^{\log_a b} = b]$

ঙ) $18 = \log_2(2^{18}) \qquad [\because \log_a(a^x) = x]$

লগারিদমের সূত্রাবলী

নবম-দশম শ্রেণির গণিতে প্রমাণ দেওয়া হয়েছে বিধায় এখানে শুধু সূত্রগুলো দেখানো হল।

১. $\log_a a = 1$ এবং $\log_a 1 = 0$

২. $\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N$

৩. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

৪. $\log_a(M^N) = N \log_a M$

৫. $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$ [ভিত্তি পরিবর্তনের সূত্র]

উদাহরণ ২০. $\log_2 5 + \log_2 7 + \log_2 3 = \log_2(5 \cdot 7 \cdot 3) = \log_2 105$

উদাহরণ ২১. $\log_3 20 - \log_3 5 = \log_3 \frac{20}{5} = \log_3 4$

উদাহরণ ২২. $\log_5 64 = \log_5 2^6 = 6\ \log_5 2$

দ্রষ্টব্য:

(i) যদি $x > 0,\ y > 0$ এবং $a \neq 1$ হয় তবে $x = y$ হবে যদি এবং কেবল যদি $\log_a x = \log_a y$

(ii) যদি $a > 1$ এবং $x > 1$ হয় তবে $\log_a x > 0$

(iii) যদি $0 < a < 1$ এবং $0 < x < 1$ হয় তবে $\log_a x > 0$

(iv) যদি $a > 1$ এবং $0 < x < 1$ তবে $\log_a x < 0$

উদাহরণ ২৩. x এর মান নির্ণয় কর যখন

ক) $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3}$

খ) $\log_{10}[98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}] = 2$

সমাধান:

ক) $\log_{\sqrt{8}} x = 3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$

বা, $x = (\sqrt{8})^{\frac{10}{3}} = (\sqrt{2^3})^{\frac{10}{3}}$

বা, $x = 2^{\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{3}} = 2^5 = 32$

$\therefore\ x = 32$

খ) যেহেতু $\log_{10}[98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36}] = 2$

বা, $98 + \sqrt{x^2 - 12x + 36} = 10^2 = 100$

বা, $\sqrt{x^2 - 12x + 36} = 2$

বা, $x^2 - 12x + 36 = 4$

বা, $x^2 - 12x + 32 = 0$

বা, $(x - 4)(x - 8) = 0$

$\therefore x = 4$ বা $x = 8$

উদাহরণ ২৪. দেখাও যে, $a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b} = 1$

সমাধান: ধরি, $p = a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b}$

তাহলে, $\log_k p = (\log_k b - \log_k c)\log_k a + (\log_k c - \log_k a)\log_k b + (\log_k a - \log_k b)\log_k c$

বা $\log_k p = 0$ বা $p = k^0 = 1$

$\therefore\ a^{\log_k b - \log_k c} \times b^{\log_k c - \log_k a} \times c^{\log_k a - \log_k b} = 1$

উদাহরণ ২৫. দেখাও যে, $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

সমাধান: ধরি $p = \log_a y,\ q = \log_a x$

সুতরাং $a^p = y,\ a^q = x$

$\therefore\ (a^p)^q = y^q$ বা $y^q = a^{pq}$

এবং $(a^q)^p = x^p$ বা $x^p = a^{pq}$

$\therefore\ x^p = y^q$ বা $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

উদাহরণ ২৬. দেখাও যে, $\log_a p \times \log_p q \times \log_q r \times \log_r b = \log_a b$

সমাধান: বামপক্ষ $= \log_a p \times \log_p q \times \log_q r \times \log_r b$

$= (\log_a p \times \log_p q) \times (\log_q r \times \log_r b)$

$= \log_a q \times \log_q b = \log_a b =$ ডানপক্ষ

উদাহরণ ২৭. দেখাও যে, $\dfrac{1}{\log_a(abc)} + \dfrac{1}{\log_b(abc)} + \dfrac{1}{\log_c(abc)} = 1$

সমাধান: ধরি, $\log_a(abc) = x,\ \log_b(abc) = y,\ \log_c(abc) = z$

সুতরাং, $a^x = abc,\ b^y = abc,\ c^z = abc$

$\therefore a = (abc)^{\frac{1}{x}},\ b = (abc)^{\frac{1}{y}},\ c = (abc)^{\frac{1}{z}}$

এখন, $(abc)^1 = abc = (abc)^{\frac{1}{x}}(abc)^{\frac{1}{y}}(abc)^{\frac{1}{z}} = (abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

$\therefore \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$

অর্থাৎ $\dfrac{1}{\log_a(abc)} + \dfrac{1}{\log_b(abc)} + \dfrac{1}{\log_c(abc)} = 1$

উদাহরণ ২৮. যদি $p = \log_a(bc),\ q = \log_b(ca),\ r = \log_c(ab)$ হয় তবে দেখাও যে,

$\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} + \dfrac{1}{r+1} = 1$

সমাধান: $1 + p = 1 + \log_a(bc) = \log_a a + \log_a(bc) = \log_a(abc)$

একইভাবে $1 + q = \log_b(abc)$ এবং $1 + r = \log_c(abc)$

পূর্ববর্তী উদাহরণে আমরা প্রমাণ করেছি, $\dfrac{1}{\log_a(abc)} + \dfrac{1}{\log_b(abc)} + \dfrac{1}{\log_c(abc)} = 1$

$\therefore\ \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{q+1} + \dfrac{1}{r+1} = 1$

উদাহরণ ২৯. যদি $\dfrac{\log a}{y-z} = \dfrac{\log b}{z-x} = \dfrac{\log c}{x-y}$ হয় তবে দেখাও যে, $a^x b^y c^z = 1$

সমাধান: ধরি, $\dfrac{\log a}{y-z} = \dfrac{\log b}{z-x} = \dfrac{\log c}{x-y} = k$

তাহলে, $\log a = k(y-z),\ \log b = k(z-x),\ \log c = k(x-y)$

$\therefore\ x\log a + y\log b + z\log c = k(xy - zx + yz - xy + zx - yz) = 0$

বা, $\log a^x + \log b^y + \log c^z = 0$

বা, $\log(a^x b^y c^z) = 0$

বা, $\log(a^x b^y c^z) = \log 1$ $[\because \log 1 = 0]$

$\therefore\ a^x b^y c^z = 1$

কাজ:

ক) যদি $\dfrac{\log a}{b-c} = \dfrac{\log b}{c-a} = \dfrac{\log c}{a-b}$ হয়, তাহলে $a^a \cdot b^b \cdot c^c$ এর মান নির্ণয় কর।

খ) যদি $a,\ b,\ c$ পরপর তিনটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\log(1+ac) = 2\log b$

গ) যদি $a^2 + b^2 = 7ab$ হয়, তবে দেখাও যে, $\log\left(\dfrac{a+b}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\log(ab) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$

ঘ) যদি $\log\left(\dfrac{x+y}{3}\right) = \dfrac{1}{2}(\log x + \log y)$ হয়, তবে দেখাও যে, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 7$

ঙ) যদি $x = 1 + \log_a(bc),\ y = 1 + \log_b(ca)$ এবং $z = 1 + \log_c(ab)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $xyz = xy + yz + zx$

চ) (১) যদি $2\log_8(A) = p,\ 2\log_2(2A) = q$ এবং $q - p = 4$ হয়, তবে A এর মান নির্ণয় কর।

(২) যদি $\log x^y = 6$ এবং $\log 14x^{8y} = 3$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।

সূচকীয়, লগারিদমীয় ও পরমমান ফাংশন

প্রথম অধ্যায়ে আমরা ফাংশন সম্পর্কে বিস্তারিত জেনেছি। এখানে সূচকীয়, লগারিদমীয় ও পরমমান ফাংশন সম্পর্কে আলোচনা করা হল:

সূচকীয় ফাংশন

নিচের তিনটি সারণীতে বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো লক্ষ করি:

সারণি ১

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	-2	0	2	4	6

সারণি ২

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	4	9	16	25

সারণি ৩

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

সারণি ১ এ বর্ণিত x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য y এর মানগুলোর অন্তর সমান যা দ্বারা $y = 2x$ ফাংশনটি বর্ণিত হয়েছে। ইহা একটি সরলরেখার সমীকরণ।

সারণি ২ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো দ্বারা দ্বিঘাত সমীকরণ $y = x^2$ ফাংশনটি বর্ণিত হয়েছে।

সারণি ৩ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 2^x$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়। এখানে 2 একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা এবং x এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য y এর বর্ণিত মানগুলো পাওয়া যায়।

সূচক ফাংশন $f(x) = a^x$ সকল বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য সংজ্ঞায়িত, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$। যেমন $y = 2^x,\ 10^x, x^x, e^x$ ইত্যাদি সূচক ফাংশন।

দ্রষ্টব্য: সূচক ফাংশন $f(x) = a^x$ এর ডোমেন $(-\infty, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= (0, \infty)$

কাজ:

ক) নিচের ছকে বর্ণিত সূচক ফাংশন লিখ:

(১)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

(২)

x	-1	0	1	2	3
y	-3	0	3	6	9

(৩)

x	1	2	3	4	5
y	4	16	64	256	1024

(৪)

x	-3	-2	-1	0	1
y	0	1	2	3	4

(৫)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25

(৬)

x	1	2	3	4	5
y	5	10	15	20	25

খ) নিচের কোনটি সূচক ফাংশন নির্দেশ করে:

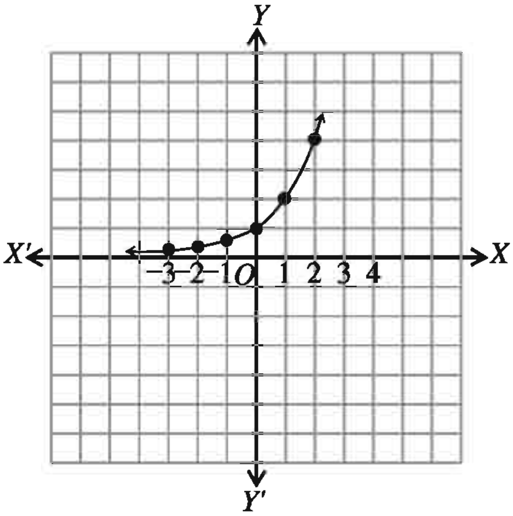
(১) $y = -3^x$	(২) $y = 3x$	(৩) $y = -2x - 3$
(৪) $y = 5 - x$	(৫) $y = x^2 + 1$	(৬) $y = 3x^2$

$f(x)=2^x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন

$y=2^x$ ধরে x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর সংশ্লিষ্ট মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

ছক কাগজে (x, y) এর মানগুলো স্থাপন করলে পাশের লেখচিত্র পাওয়া যায়।



চিত্র লক্ষ করি:

(i) x ঋণাত্মক এবং $|x|$ যথেষ্ট বড় হলে y এর মান 0 (শূন্য) এর কাছাকাছি হয় যদিও কখনো শূন্য হয় না অর্থাৎ, $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$ হয়

(ii) x ধনাত্মক এবং x যথেষ্ট বড় হলে y এর মান যথেষ্ট বড় হয়। অর্থাৎ $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$।

এ থেকে বুঝা যায় $f(x)=2^x$ ফাংশনের রেঞ্জ $(0, \infty)$।

কাজ: লেখচিত্র অঙ্কন কর, যেখানে $-3 \leq x \leq 3$

ক) $y=2^{-x}$ খ) $y=4^x$ গ) $y=2^{\frac{x}{2}}$ ঘ) $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$

লগারিদমীয় ফাংশন

যেহেতু সূচক ফাংশন একটি এক-এক ফাংশন। সুতরাং এর বিপরীত ফাংশন আছে।

$f(x)=y=a^x$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(y)=x=\log_a y$

অর্থাৎ x হলো y এর a ভিত্তিক লগারিদম।

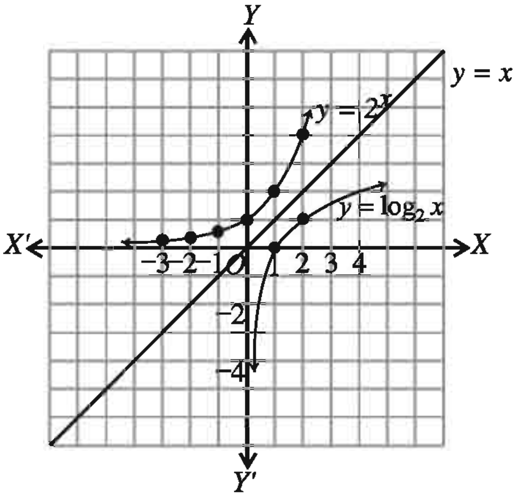
সংজ্ঞা: লগারিদমিক ফাংশন $f(x)=\log_a x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত যেখানে $a>0$ এবং $a \neq 1$।

যেমন, $f(x)=\log_3 x, \log_e x,\ \log_{10} x$ ইত্যাদি লগারিদমীয় ফাংশন।

$y = \log_2 x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন

যেহেতু $y = \log_2 x$ ফলে $y = 2^x$ এর বিপরীত ফাংশন। $y = x$ রেখার সাপেক্ষে সূচক ফাংশনের প্রতিফলন লগারিদমীয় ফাংশন নির্ণয় করা হয়েছে যাহা $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

এখানে ডোমেন $R = (0, \infty)$ এবং রেঞ্জ $D = (-\infty, \infty)$



কাজ: নিচের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এদের বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর।

ক) $y = 3x + 2$
খ) $y = x^2 + 3,\ x \geq 0$
গ) $y = x^3 - 1$
ঘ) $y = \dfrac{4}{x}$
ঙ) $y = 3x$
চ) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$
ছ) $y = 2^{-x}$
জ) $y = 4^x$

উদাহরণ ৩০. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(0) = \dfrac{0}{|0|} = \dfrac{0}{0}$ যা অসংজ্ঞায়িত।

$\therefore x = 0$ বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনটি বিদ্যমান নয়। শূন্য ব্যতিত x এর অন্য বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটি বিদ্যমান।

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $D_f = R - \{0\}$

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1, & \text{যখন } x > 0 \\ \dfrac{x}{-x} = -1, & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

$\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \{-1, 1\}$

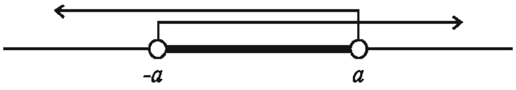
উদাহরণ ৩১. $y = f(x) = \ln\dfrac{a+x}{a-x},\ a > 0$ এবং পূর্ণসংখ্যা, ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান: যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়

$\therefore \dfrac{a+x}{a-x} > 0$ যদি

(*i*) $a + x > 0$ এবং $a - x > 0$ হয় অথবা

(*ii*) $a + x < 0$ এবং $a - x < 0$ হয়



$(i) \implies x > -a$ এবং $a > x$

$\implies -a < x$ এবং $x < a$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -a < x\} \cap \{x : x < a\}$

$= (-a, \infty) \cap (-\infty, a) = (-a, a)$

$(ii) \implies x < -a$ এবং $a < x$

$\implies x < -a$ এবং $x > a$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -a\} \cap \{x : x > a\} = \varnothing.$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = (i)$ ও (ii) থেকে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $(-a, a) \cup \varnothing = (-a, a)$

রেঞ্জ: $y = f(x) = \ln\dfrac{a+x}{a-x} \implies e^y = \dfrac{a+x}{a-x}$

$\implies a + x = ae^y - xe^y$

$\implies x + xe^y = ae^y - a$

$\implies (1 + e^y)x = a(e^y - 1)$

$\implies x = \dfrac{a(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = R$

কাজ: নিচের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করঃ

ক) $y = \ln\dfrac{2+x}{2-x}$

খ) $y = \ln\dfrac{3+x}{3-x}$

গ) $y = \ln\dfrac{4+x}{4-x}$

ঘ) $y = \ln\dfrac{5+x}{5-x}$

পরমমান

নবম-দশম শ্রেণির গণিতে এ সম্পর্কে বিস্তারিত বর্ণনা করা হয়েছে। এখানে শুধুমাত্র পরমমানের সংজ্ঞা দেওয়া হলো।

যেকোনো বাস্তব সংখ্যা x এর মান শূন্য, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক। কিন্তু x এর পরমমান সবসময়ই শূন্য বা ধনাত্মক। x এর পরমমানকে $|x|$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং পরমমান নিম্নলিখিতভাবে সংজ্ঞায়িত করা হয়।

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{যখন } x \geq 0 \\ -x, & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

উদাহরণ ৩২. $|0| = 0,\ |3| = 3,\ |-3| = -(-3) = 3$

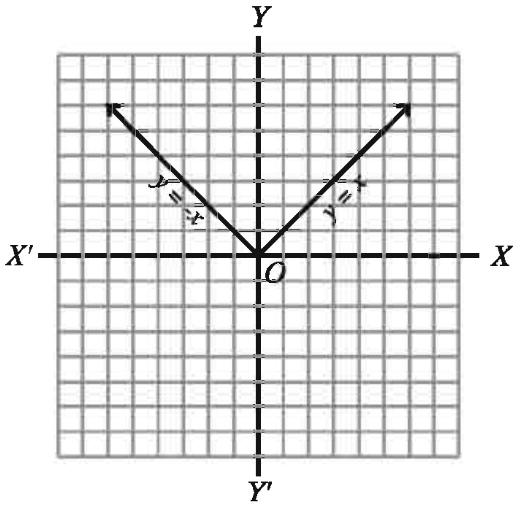
পরমমমান ফাংশন (Absolute Value Function)

যদি $x \in R$ হয় তবে

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x \geq 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

কে পরমমমান ফাংশন বলা হয়।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = R$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty)$



উদাহরণ ৩৩. $f(x) = e^{\frac{-|x|}{2}}$ যখন $-1 < x < 0$। এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f(x) = e^{\frac{-|x|}{2}},\ -1 < x < 0$

x এর মান যেহেতু -1 থেকে 0 এর মধ্যে নির্দিষ্ট।

সুতরাং ডোমেন $D_f = (-1, 0)$

আবার $-1 < x < 0$ ব্যবধিতে $f(x) \in (e^{\frac{-1}{2}}, 1)$

সুতরাং রেঞ্জ $f = (e^{\frac{-1}{2}}, 1)$

ফাংশনের লেখচিত্র

কোনো সমতলে কোনো ফাংশনকে জ্যামিতিকভাবে উপস্থাপন করা গেলে ঐ ফাংশনকে চেনা যায়। ফাংশনের জ্যামিতিকভাবে এই উপস্থাপনকে ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়েছে বলা হয়। এখানে সূচক, লগারিদম ও পরমমান ফাংশনের লেখচিত্রের অঙ্কন পদ্ধতি নিয়ে আলোচনা করা হলো।

(1) $y = f(x) = a^x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর:

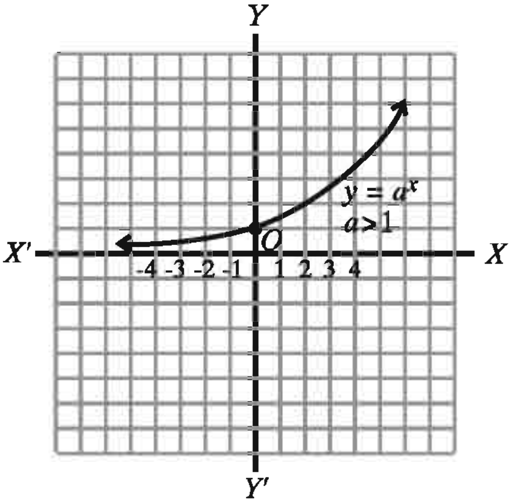
(i) যখন $a > 1$ এবং x যেকোনো ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা তখন ফাংশন $f(x) = a^x$ সর্বদা ধনাত্মক।

ধাপ ১. x এর ধনাত্মক মানের জন্য x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে $f(x)$ এর মান বৃদ্ধি পায়।

ধাপ ২. যখন $x = 0$ তখন $y = a^0 = 1$, সুতরাং $(0, 1)$ রেখার উপর একটি বিন্দু।

ধাপ ৩. x এর ঋণাত্মক মানের জন্য x এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে $f(x)$ এর মান ক্রমাগত হ্রাস পাবে। অর্থাৎ $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$ হবে।

এখানে $y = a^x$, $a > 1$ ফাংশনের লেখচিত্র পাশের চিত্রে দেখানো হলো। এখানে $D_f = (-\infty, \infty)$ এবং $R_f = (0, \infty)$।



(ii) যখন $0 < a < 1$, x এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক তখন $y = f(x) = a^x$ সর্বদাই ধনাত্মক।

ধাপ ১. লক্ষ করি, মূল বিন্দুর ডানদিকে x এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পেতে থাকলে অর্থাৎ $x \to \infty$ হলে $y \to 0$ হবে।

ধাপ ২. যখন $x = 0$ তখন $y = a^0 = 1$ সুতরাং $(0, 1)$ বিন্দু রেখার উপর পড়ে।

ধাপ ৩. যখন $a < 1$ এবং x ঋণাত্মক তখন x এর মান মূল বিন্দুর বামদিকে ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পাবে অর্থাৎ $y \to \infty$।

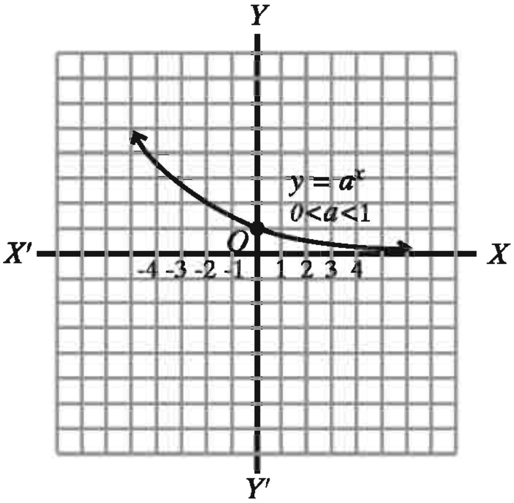
ধরি $a = \frac{1}{2} < 1$, $x = -2, \ -3, \cdots, -n$ তখন

$y = f(x) = a^x = (\frac{1}{2})^{-2} = 2^2, y = 2^3, \cdots,$

$y = 2^n$. যখন $n \to \infty$ তখন $y \to \infty$।

$y = f(x) = a^x$ এর লেখচিত্র পাশের চিত্রে দেখানো হলো।

এখানে $D_f = (-\infty, \infty)$ এবং $R_f = (0, \infty)$।



কাজ: নিচের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর:

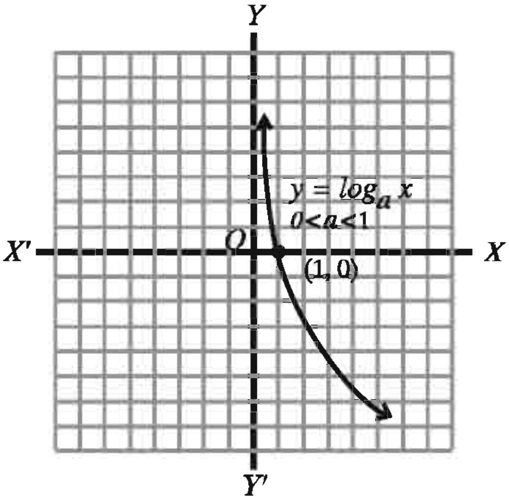
ক) $f(x) = 2^x$ খ) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

গ) $f(x) = e^x, \ 2 < e < 3$ ঘ) $f(x) = e^{-x}, \ 2 < e < 3$

ঙ) $f(x) = 3^x$

(2) $f(x) = \log_a x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর:

(i) ধরি, $y = f(x) = \log_a x$ যখন $0 < a < 1$। ফাংশনটিকে লেখা যায় $x = a^y$



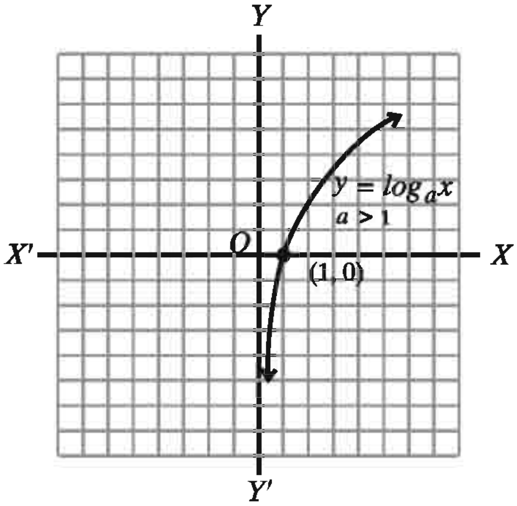
ধাপ ১. যখন y এর ধনাত্মক মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পেতে থাকে অর্থাৎ, $y \to \infty$ হয় তখন x এর মান শূন্যের দিকে ধাবিত হয় অর্থাৎ $x \to 0$.

ধাপ ২. যেহেতু $a^0 = 1$ কাজেই $y = \log_a 1 = 0$, সুতরাং রেখাটি $(1, 0)$ বিন্দুগামী।

ধাপ ৩. y এর ঋণাত্মক মান অর্থাৎ y এর মান মূলবিন্দুর নিচের দিকে ক্রমাগত বৃদ্ধি পেতে থাকে অর্থাৎ $y \to -\infty$ হয় তাহলে x এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পেতে থাকে অর্থাৎ $x \to \infty$.

এখন পাশের চিত্রে $y = \log_a x,\ 0 < a < 1$ দেখানো হলো। এখানে $D_f = (0, \infty)$ এবং $R_f = (-\infty, \infty)$.

(ii) যখন $y = \log_a x,\ a > 1$ তখন

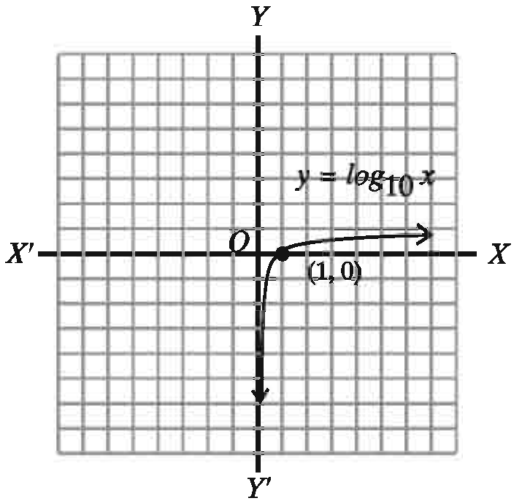


ধাপ ১. যখন $a > 1$, y এর সকল মানের জন্য x এর মান ধনাত্মক এবং y এর মানের ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে x এর মান বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয়। অর্থাৎ $y \to \infty$ হলে $x \to \infty$.

ধাপ ২. যেহেতু $a^0 = 1$ কাজেই $y = \log 1 = 0$ সুতরাং, রেখাটি $(1, 0)$ বিন্দুগামী।

ধাপ ৩. y এর ঋণাত্মক মানের জন্য y এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পেলে অর্থাৎ, $y \to -\infty$ হলে x এর মান ক্রমাগত শূন্যের দিকে ধাবিত হয় অর্থাৎ $x \to 0$।

এখন $f(x) = \log_a x,\ a > 1$ এর লেখচিত্র পাশের চিত্রে দেখানো হলো। এখানে $D_f = (0, \infty)$ এবং $R_f = (-\infty, \infty)$



উদাহরণ ৩৪. $f(x) = \log_{10} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: ধরি $y = f(x) = \log_{10} x$

যেহেতু $10^0 = 1$ কাজেই $y = \log_{10} 1 = 0$ সুতরাং, রেখাটি $(1, 0)$ বিন্দুগামী। যখন $x \to 0$ তখন $y \to -\infty$। যখন $x \to \infty$ তখন $y \to \infty$।

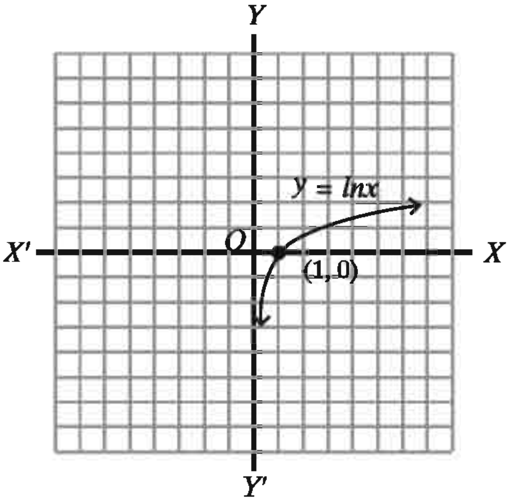
$\therefore y = \log_{10} x$ রেখাটি ঊর্ধ্বগামী।

নিচে রেখাটির লেখচিত্র অঙ্কন করা হলো।

এখানে $D_f = (0, \infty)$ এবং $R_f = (-\infty, \infty)$.

উদাহরণ ৩৫. $f(x) = \ln x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান: ধরি $y = f(x) = \ln x$
যেহেতু $e^0 = 1$ কাজেই $y = \ln 1 = 0$ সুতরাং, রেখাটি $(1, 0)$ বিন্দুগামী। যখন $x \to 0$ তখন $y \to -\infty$। যখন $x \to \infty$ তখন $y \to \infty$।
$\therefore\ y = \ln x$ রেখাটি ঊর্ধ্বগামী।
পাশে রেখাটির লেখচিত্র অঙ্কন করা হলো।
এখানে $D_f = (0, \infty)$ এবং $R_f = (-\infty, \infty)$।



উদাহরণ ৩৬. $y = \dfrac{4-x}{4+x}$ একটি ফাংশন।

ক) ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় কর।

খ) ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর।

গ) $g(x) = \ln y$ হলে, $g(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে, $y = \dfrac{4-x}{4+x}$

এখানে $4 + x = 0$ অর্থাৎ $x = -4$ হলে y অসংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore\ x \neq -4$

$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন $= R - \{-4\}$

খ) দেওয়া আছে, $y = \dfrac{4-x}{4+x}$

ধরি, $f(x) = y \therefore x = f^{-1}(y)$
এখন, $y = \dfrac{4-x}{4+x}$
বা, $4y + xy = 4 - x$
বা, $xy + x = 4 - 4y$
বা, $x(y + 1) = 4(1 - y)$
বা, $x = \dfrac{4(1-y)}{1+y}$
বা, $f^{-1}(y) = \dfrac{4(1-y)}{1+y}$ $[\because x = f^{-1}(y)]$
$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{4(1-x)}{(1+x)}$ [চলক পরিবর্তন করে]

গ) দেওয়া আছে, $g(x) = \ln(y)$

$\therefore g(x) = \ln\dfrac{4-x}{4+x}$ $[\because y = \dfrac{4-x}{4+x}]$

$\therefore g(x) \in R$ হবে যদি $\dfrac{4-x}{4+x} > 0$ হয়।

এখন $\dfrac{4-x}{4+x} > 0$ হবে যদি

(i) $4-x>0$ এবং $4+x>0$ হয়, অথবা

(ii) $4-x<0$ এবং $4+x<0$ হয়।

এখন $(i) \implies x<4$ এবং $x>-4$

$\therefore$ ডোমেন $=\{x\in R : x<4\}\cap\{x\in R : x>-4\} = (-\infty,4)\cap(-4,\infty) = (-4,4)$

আবার, $(ii) \implies x>4$ এবং $x<-4$

$\therefore$ ডোমেন $=\{x\in R : x>4\}\cap\{x\in R : x<-4\} = (4,\infty)\cap(-\infty,4) = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $=(-4,4)\cup\varnothing = (-4,4)$

কাজ:

ক) টেবিলে উল্লেখিত x ও y এর মান নিয়ে $y=\log_{10}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

x	0.5	1	2	3	4	5	10	12
y	−0.3	0	0.3	0.5	0.6	0.7	1	1.07

খ) $y=\log_e x$ এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য (ক) এর ন্যায় x ও y এর মান নিয়ে টেবিল তৈরি কর ও লেখচিত্র আঁক।

অনুশীলনী ৯.২

১. $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$ এর সরল মান কোনটি?

ক) 0 খ) 1 গ) a ঘ) x

২. যদি $a,\ b,\ p>0$ এবং $a\neq 1, b\neq 1$ হয়, তবে

(i) $\log_a P = \log_b P\times\log_a b$

(ii) $\log_a\sqrt{a}\times\log_b\sqrt{b}\times\log_c\sqrt{c}$ এর মান 2

(iii) $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i ও ii খ) ii ও iii গ) i ও iii ঘ) i, ii ও iii

৩-৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও যখন $x,y,z\neq 0$ এবং $a^x=b^y=c^z$

৩. কোনটি সঠিক?

ক) $a = b^{\frac{y}{z}}$ খ) $a = c^{\frac{z}{y}}$ গ) $a = c^{\frac{z}{x}}$ ঘ) $a \neq \frac{b^2}{c}$

৪. নিচের কোনটি ac এর সমান?

ক) $b^{\frac{y}{x}} \cdot b^{\frac{y}{z}}$ খ) $b^{\frac{y}{x}} \cdot b^{\frac{z}{y}}$ গ) $b^{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}}$ ঘ) $b^{\frac{z}{y}+\frac{y}{z}}$

৫. $b^2 = ac$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$ খ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ গ) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{x}$ ঘ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{z}{2}$

৬. দেখাও যে,

ক) $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right) = 0$

খ) $\log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right) + \log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right) + \log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right) = 0$

গ) $\log_{\sqrt{a}}b \times \log_{\sqrt{b}}c \times \log_{\sqrt{c}}a = 8$

ঘ) $\log_a\log_a\log_a\left(a^{a^{a^b}}\right) = b$

৭. ক) যদি $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a b^b c^c = 1$

খ) যদি $\frac{\log_k a}{y-z} = \frac{\log_k b}{z-x} = \frac{\log_k c}{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে,

(১) $a^{y+z}b^{z+x}c^{x+y} = 1$

(২) $a^{y^2+yz+z^2} \cdot b^{z^2+zx+x^2} \cdot c^{x^2+xy+y^2} = 1$

গ) যদি $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$ হয়, তবে দেখাও যে, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ঘ) দেখাও যে, $\log_k\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 2\log_k(x-\sqrt{x^2-1})$

ঙ) যদি $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$

চ) যদি $xy^{a-1} = p, xy^{b-1} = q, xy^{c-1} = r$ হয়, তবে দেখাও যে,

$(b-c)\log_k p + (c-a)\log_k q + (a-b)\log_k r = 0$

ছ) যদি $\frac{ab\ \log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\ \log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\ \log_k(ca)}{c+a}$ হয়, তবে দেখাও যে,
$a^a = b^b = c^c$

জ) যদি $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z}$ হয়, তবে দেখাও যে,
$x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$

৮. লেখচিত্র অঙ্কন কর:

ক) $y = 3^x$ খ) $y = -3^x$ গ) $y = 3^{x+1}$

ঘ) $y = -3^{x+1}$ ঙ) $y = 3^{-x+1}$ চ) $y = 3^{x-1}$

৯. নিচের ফাংশনের বিপরীত ফাংশন লিখ এবং লেখচিত্র অঙ্কন করে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর:

ক) $y = 1 - 2^x$ খ) $y = \log_{10} x$ গ) $y = x^2, x > 0$

১০. $f(x) = \ln\,(x - 2)$ ফাংশনটির ডোমেন D_f এবং রেঞ্জ R_f নির্ণয় কর।

১১. $f(x) = \ln\dfrac{1 - x}{1 + x}$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

১২. ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর।

ক) $f(x) = |x|$, যখন $-5 \leq x \leq 5$

খ) $f(x) = x + |x|$, যখন $-2 \leq x \leq 2$

গ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \textit{যখন } x \neq 0 \\ 0, & \textit{যখন } x = 0 \end{cases}$

১৩. দেওয়া আছে, $2^{2x} \cdot 2^{y-1} = 64 \cdots (i)$ এবং $6^x \cdot \dfrac{6^{y-2}}{3} = 72 \cdots (ii)$

ক) (i) ও (ii) কে x ও y চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণে পরিণত কর।

খ) সমীকরণদ্বয় সমাধান করে শুদ্ধতা যাচাই কর।

গ) x ও y এর মান যদি কোন চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য হয় (যেখানে বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90°) তবে চতুর্ভুজটি আয়ত না বর্গ উল্লেখ কর এবং এর ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৪. দেওয়া আছে, $y = 2^x$

ক) প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

খ) ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এর বৈশিষ্ট্যগুলি লিখ।

গ) ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে এটি এক-এক কিনা তা নির্ধারণ কর এবং বিপরীত ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক।

১৫. $f(x) = 3^{2x+2}$ এবং $g(x) = 27^{x+1}$

ক) $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

খ) $f(x) + g(x) = 36$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।

গ) $q(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ হলে, $q(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করে লেখচিত্র থেকে ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

অধ্যায় ১০

দ্বিপদী বিস্তৃতি (Binomial Expansion)

বীজগণিতীয় রাশির (একপদী, দ্বিপদী, বহুপদী) যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ, বর্গ এবং ঘন সংক্রান্ত আলোচনা পূর্ববর্তী শ্রেণিতে করা হয়েছে। দ্বিপদী রাশি বা বহুপদী রাশির ঘাত বা শক্তি তিন এর বেশি হলে সেই সমস্ত ক্ষেত্রে মান নির্ণয় যথেষ্ট শ্রমসাধ্য ও সময়সাপেক্ষ হয়ে পড়ে। এই অধ্যায়ে দ্বিপদী রাশির ঘাত বা শক্তি তিন এর বেশি হলে কি প্রক্রিয়ায় কাজটি সম্পন্ন করা যায়, তা উপস্থাপন করা হবে। সাধারণভাবে ঘাত বা শক্তি এর জন্য সূত্র প্রতিপাদন করা হবে, যার মাধ্যমে যেকোনো অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাতের দ্বিপদী রাশির মান নির্ণয় করা সম্ভব হবে। তবে এই পর্যায়ে এর মান একটি নির্দিষ্ট সীমা $(n \leq 8)$ অতিক্রম করবে না। বিষয়টি যাতে শিক্ষার্থীরা সহজে বুঝতে ও ব্যবহার করতে পারে সে জন্য একটি ত্রিভুজ ব্যবহার করা হবে যেটি প্যাসকেলের ত্রিভুজ (Pascal's triangle) বলে পরিচিত। দ্বিপদী রাশির ঘাত ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা -

- দ্বিপদী বিস্তৃতি বর্ণনা করতে পারবে।
- প্যাসকেল ত্রিভুজ বর্ণনা করতে পারবে।
- স্বাভাবিক সংখ্যার ঘাতের জন্য দ্বিপদী বিস্তৃতি বর্ণনা করতে পারবে।
- $n!$ ও ${}^nC_r$ এর মান নির্ণয় করতে পারবে।
- দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে গাণিতিক সমস্যা সমাধান করতে পারবে।

দ্বিপদী $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি

দুইটি পদের সমন্বয়ে গঠিত বীজগণিতীয় রাশিকে দ্বিপদী রাশি (Binomials) বলা হয়। $a+b,\ x-y,\ 1+x,\ 1-x^2,\ a^2-b^2$ ইত্যাদি দ্বিপদী রাশি। আমরা প্রথমেই একটি দ্বিপদী রাশি $(1+y)$ চিহ্নিত করি। এখন $(1+y)$ কে যদি ক্রমাগত $(1+y)$ দ্বারা গুণ করতে থাকি তাহলে আমরা পাব $(1+y)^2,\ (1+y)^3,\ (1+y)^4,\ (1+y)^5,\ \cdots$ ইত্যাদি। আমরা জানি,

$$(1+y)^2 = (1+y)(1+y) = 1+2y+y^2$$

$$(1+y)^3 = (1+y)(1+y)^2 = (1+y)(1+2y+y^2) = 1+3y+3y^2+y^3$$

অনুরূপভাবে দীর্ঘ গুণন প্রক্রিয়ার মাধ্যমে $(1+y)^4$, $(1+y)^5, \cdots$ ইত্যাদি গুণফল নির্ণয় সম্ভব। কিন্তু $(1+y)$ এর ঘাত বা শক্তি যত বাড়তে থাকবে গুণফল তত দীর্ঘ ও সময়সাপেক্ষ হবে। তাই এমন একটি সহজ পদ্ধতি বের করতে হবে যাতে $(1+y)$ এর যেকোনো ঘাত (ধরি n) বা শক্তির জন্য $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি সহজেই নির্ণয় করা সম্ভব হবে। n এর মান $0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \cdots$ অর্থাৎ অঋণাত্মক মানের জন্য এই অংশে আলোচনা সীমাবদ্ধ থাকবে। এখন প্রক্রিয়াটি আমরা ভালভাবে লক্ষ করি।

n এর মান		প্যাসকেল ত্রিভুজ	পদসংখ্যা
$n=0$	$(1+y)^0 =$	1	1
$n=1$	$(1+y)^1 =$	$1+y$	2
$n=2$	$(1+y)^2 =$	$1+2y+y^2$	3
$n=3$	$(1+y)^3 =$	$1+3y+3y^2+y^3$	4
$n=4$	$(1+y)^4 =$	$1+4y+6y^2+4y^3+y^4$	5
$n=5$	$(1+y)^5 =$	$1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5$	6

উপরের বিস্তৃতিসমূহকে ভিত্তি করে আমরা $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি সম্পর্কে নিম্নোক্ত সিদ্ধান্তে আসতে পারি।

ক) $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ আছে। অর্থাৎ ঘাত বা শক্তির চেয়ে পদসংখ্যা একটি বেশি।

খ) y এর ঘাত শূন্য থেকে শুরু হয়ে $1,\ 2,\ 3, \cdots, n$ পর্যন্ত বৃদ্ধি পাবে। অর্থাৎ y এর ঘাত ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পেয়ে n পর্যন্ত পৌঁছাবে।

দ্বিপদী সহগ

উপরের প্রত্যেক দ্বিপদী বিস্তৃতিতে y এর বিভিন্ন ঘাতের সহগকে দ্বিপদী সহগ (coefficient) বলা হয়। 1 কে y এর সহগ বিবেচনা করতে হবে। উপরের বিস্তৃতির সহগগুলোকে সাজালে আমরা পাই,

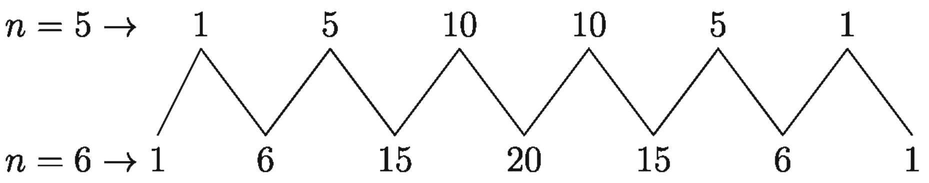
$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1

লক্ষ করলে দেখব সহগগুলো একটি ত্রিভুজের আকার ধারণ করেছে। দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগ নির্ণয়ের এই কৌশল Blaise Pascal প্রথম ব্যবহার করেন। তাই এই ত্রিভুজকে প্যাসকেলের ত্রিভুজ (Pascal's triangle) বলা হয়। প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে আমরা সহজেই দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতিতে সহগসমূহ নির্ণয় করতে পারি।

প্যাসকেলের ত্রিভুজের ব্যবহার

প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে আমরা দেখতে পাই এর বাম ও ডান দিকে 1 আছে। ত্রিভুজের মাঝখানের সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটি ঠিক উপরের দুইটি সংখ্যার যোগফল। নিম্নের উদাহরণটি লক্ষ করলে বিষয়টি খুব সহজেই বুঝা যাবে।

$n = 5$ ও $n = 6$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলো হবে নিম্নরূপ:



$\therefore\ (1+y)^5 = 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$

$\therefore\ (1+y)^6 = 1 + 6y + 15y^2 + 20y^3 + 15y^4 + 6y^5 + y^6$

এবং $(1+y)^7 = 1 + 7y + 21y^2 + 35y^3 + 35y^4 + 21y^5 + 7y^6 + y^7$

কাজ: নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহ নির্ণয় কর (উপরের বিস্তৃতিসমূহের সাহায্য নাও):

$(1+y)^8 =$

$(1+y)^9 =$

$(1+y)^{10} =$

আমরা যদি ভালভাবে খেয়াল করি তাহলে বুঝতে পারব এই পদ্ধতির একটি বিশেষ দুর্বলতা আছে। যেমন আমরা যদি $(1+y)^5$ এর বিস্তৃতি জানতে চাই তাহলে $(1+y)^4$ এর বিস্তৃতি জানা দরকার। আবার যেকোনো দ্বিপদী সহগ জানার জন্য তার ঠিক উপরের পূর্ববর্তী দুইটি সহগ জানা প্রয়োজন। এই অবস্থা থেকে উত্তরণের জন্য আমরা সরাসরি দ্বিপদী সহগ নির্ণয়ের কৌশল বের করতে চাই। প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে আমরা দেখতে পাই দ্বিপদী বিস্তৃতির সহগগুলো ঘাত n এবং পদটি কোন অবস্থানে আছে তার উপর নির্ভরশীল। আমরা একটি নতুন সাংকেতিক চিহ্ন $\binom{n}{r}$ বিবেচনা করি যেখানে n ঘাত এবং r পদের অবস্থানের সাথে সম্পর্কিত। উদাহরণস্বরূপ যদি $n = 4$ হয় তবে পদসংখ্যা হবে 5 টি। আমরা পদগুলি নিম্নোক্ত উপায়ে লিখি।

যখন $n = 4$, পদসংখ্যা 5 টি: $T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4,\ T_5$

তাদের সহগগুলি হলো: $1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1$

নতুন চিহ্ন ব্যবহার করে সহগ: $\binom{4}{0},\ \binom{4}{1},\ \binom{4}{2},\ \binom{4}{3},\ \binom{4}{4}$

এখানে, $\binom{4}{0} = 1$, $\binom{4}{1} = \frac{4}{1} = 4$, $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$, $\binom{4}{3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3} = 4$, এবং $\binom{4}{4} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 1$

[প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে সহজেই বুঝতে পারবে]

উল্লিখিত নতুন চিহ্নের সাহায্যে ($n = 1, 2, 3, \cdots$) প্যাসকেলের ত্রিভুজ হবে নিচের টেবিলের অনুরূপ:

$n = 1$	$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$
$n = 2$	$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$
$n = 3$	$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$
$n = 4$	$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$
$n = 5$	$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$

সুতরাং উপরের ত্রিভুজ থেকে আমরা খুব সহজেই বলতে পারি $(1+y)^4$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় (T_{2+1}) পদের সহগ $\binom{4}{2}$ এবং $(1+y)^5$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় (T_{2+1}) ও চতুর্থ (T_{3+1}) পদের সহগ যথাক্রমে $\binom{5}{2}$ এবং $\binom{5}{3}$। সাধারণভাবে $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$ তম পদ (T_{r+1}) এর সহগ $\binom{n}{r}$।

এখন, $\binom{n}{r}$ এর মান কত তা জানার জন্য আবারো প্যাসকেলের ত্রিভুজ লক্ষ করি। প্যাসকেলের ত্রিভুজের দুইটি হেলানো পার্শ্ব থেকে আমরা দেখতে পাই,

$$\binom{1}{0} = 1, \ \binom{2}{0} = 1, \ \binom{3}{0} = 1, \cdots, \ \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{1}{1} = 1, \ \binom{2}{1} = 2, \ \binom{3}{1} = 3, \cdots, \ \binom{n}{1} = n$$

আমরা $n = 5$ ধরে পাই

$$\binom{5}{0} = 1, \ \binom{5}{1} = 5, \ \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10, \ \binom{5}{4} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 5$$

এবং $\binom{5}{5} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} = 1$

সুতরাং $\binom{5}{3}$ এর মানের ক্ষেত্রে বলা যায়, $\binom{5}{3} = \frac{5 \times (5-1) \times (5-2)}{1 \times 2 \times 3}$ এবং

$\binom{6}{4} = \frac{6 \times (6-1) \times (6-2) \times (6-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$

সাধারণভাবে আমরা লিখতে পারি,

$$\binom{n}{0} = 1, \ \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \cdots (n-r+1)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \cdots \times r}$$

উপরোক্ত চিহ্ন ব্যবহার করে পাই,

$$\begin{aligned}(1+y)^4 &= \binom{4}{0}y^0 + \binom{4}{1}y^1 + \binom{4}{2}y^2 + \binom{4}{3}y^3 + \binom{4}{4}y^4 \\ &= 1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4 \\ (1+y)^5 &= \binom{5}{0}y^0 + \binom{5}{1}y^1 + \binom{5}{2}y^2 + \binom{5}{3}y^3 + \binom{5}{4}y^4 + \binom{5}{5}y^5 \\ &= 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5\end{aligned}$$

এবং $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি

$$\begin{aligned}(1+y)^n &= \binom{n}{0}y^0 + \binom{n}{1}y^1 + \binom{n}{2}y^2 + \binom{n}{3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n}y^n \\ &= 1 \cdot y^0 + ny^1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}y^3 + \cdots + 1 \cdot y^n\end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore \ (1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}y^3 + \cdots + y^n}$$

উদাহরণ ১. $(1+3x)^4$ কে বিস্তৃত কর।

সমাধান: প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে -

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$$\begin{aligned}(1+3x)^5 &= 1+5(3x)+10(3x)^2+10(3x)^3+5(3x)^4+1(3x)^5\\ &= 1+15x+90x^2+270x^3+405x^4+243x^5\end{aligned}$$

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে -

$$(1+3x)^5 = \binom{5}{0}(3x)^0+\binom{5}{1}(3x)^1+\binom{5}{2}(3x)^2+\binom{5}{3}(3x)^3+\binom{5}{4}(3x)^4 +\binom{5}{5}(3x)^5$$

বা, $(1+3x)^5 = 1+\frac{5}{1}(3x)+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}(3x)^2+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}(3x)^3+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(3x)^4+1\cdot(3x)^5$

$$= 1+15x+90x^2+270x^3+405x^4+243x^5$$

উদাহরণ ২. $(1-3x)^5$ কে বিস্তৃত কর।

সমাধান: প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে -

$$\begin{array}{c} 1\\ 1 \quad 1\\ 1 \quad 2 \quad 1\\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1\\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1\\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}(1-3x)^5 &= 1+5(-3x)+10(-3x)^2+10(-3x)^3+5(-3x)^4+1(-3x)^5\\ &= 1-15x+90x^2-270x^3+405x^4-243x^5\end{aligned}$$

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে -

$$(1-3x)^5 = \binom{5}{0}(-3x)^0+\binom{5}{1}(-3x)^1+\binom{5}{2}(-3x)^2+\binom{5}{3}(-3x)^3+\binom{5}{4}(-3x)^4 +\binom{5}{5}(-3x)^5$$

$$= 1+\frac{5}{1}(-3x)+\frac{5\cdot4}{1\cdot2}(-3x)^2+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}(-3x)^3+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(-3x)^4+1\cdot(-3x)^5$$

$$= 1-15x+90x^2-270x^3+405x^4-243x^5$$

মন্তব্য: $(1+3x)^5$ এবং $(1-3x)^5$ এর বিস্তৃতি থেকে দেখা যাচ্ছে যে, উভয় বিস্তৃতি একই। শুধুমাত্র সহগের চিহ্ন পরিবর্তন করে, অর্থাৎ $+,\ -,\ +,\cdots$ এর মাধ্যমে একটি থেকে অন্যটি পাওয়া সম্ভব।

কাজ: $(1+2x^2)^7$ এবং $(1-2x^2)^7$ কে বিস্তৃত কর।

উদাহরণ ৩. $(1+\frac{2}{x})^{৮}$ কে পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

সমাধান:

দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে $(1+\frac{2}{x})^{৮}$ এর পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি নিম্নরূপ:

$$(1+\frac{2}{x})^{৮} = \binom{8}{0}(\frac{2}{x})^0 + \binom{8}{1}(\frac{2}{x})^1 + \binom{8}{2}(\frac{2}{x})^2 + \binom{8}{3}(\frac{2}{x})^3 + \binom{8}{4}(\frac{2}{x})^4$$

$$= 1\cdot 1 + \frac{8}{1}\cdot\frac{2}{x} + \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{4}{x^2} + \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{8}{x^3} + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{16}{x^4}$$

$$= 1 + \frac{16}{x} + \frac{112}{x^2} + \frac{448}{x^3} + \frac{1120}{x^4}$$

$\therefore\ (1+\frac{2}{x})^{৮} = 1 + \frac{16}{x} + \frac{112}{x^2} + \frac{448}{x^3} + \frac{1120}{x^4}$ [পঞ্চম পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি]

[প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে নিজে কর।]

উদাহরণ ৪. $(1-\frac{x^2}{4})^{৮}$ এর বিস্তৃতির x^3 ও x^6 এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান: দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$(1-\frac{x^2}{4})^{৮} = \binom{8}{0}(-\frac{x^2}{4})^0 + \binom{8}{1}(-\frac{x^2}{4})^1 + \binom{8}{2}(-\frac{x^2}{4})^2 + \binom{8}{3}(-\frac{x^2}{4})^3$$
$$+\binom{8}{4}(-\frac{x^2}{4})^4 + \cdots$$

$$= 1\cdot 1 + \frac{8}{1}\cdot(-\frac{x^2}{4}) + \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot(\frac{x^4}{16}) + \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(-\frac{x^6}{64}) + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot(\frac{x^8}{256}) + \cdots$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{7}{8}x^6 + \cdots$$

$(1-\frac{x^2}{4})^{৮}$ এর বিস্তৃতিতে দেখা যাচ্ছে x^3 বর্তমান নাই। অর্থাৎ x^3 এর সহগ 0 এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$

$\therefore\ x^3$ এর সহগ 0 এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$

কাজ: প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে সত্যতা যাচাই কর।

অনুশীলনী ১০.১

১. প্যাসকেলের ত্রিভুজ বা দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে $(1+y)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে ক) $(1-y)^5$ এবং খ) $(1+2x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

২. x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে ক) $(1+4x)^6$ এবং খ) $(1-3x)^7$ এর প্রথম চার পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

৩. $(1+x^2)^8$ এর বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর। উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(1.01)^8$ এর মান নির্ণয় কর।

৪. x এর ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে নিম্নোক্ত দ্বিপদীসমূহের প্রথম তিনটি পদ নির্ণয় কর।

ক) $(1-2x)^5$ খ) $(1+3x)^9$

৫. নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহের প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর। [দ্বিপদী বিস্তৃতি বা প্যাসক্যাল ত্রিভুজ এর যেকোনো একটি ব্যবহার করে]

ক) $(1-2x^2)^7$ খ) $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^4$ গ) $\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^7$

৬. x^3 পর্যন্ত ক) $(1-x)^6$ এবং খ) $(1+2x)^6$ বিস্তৃত কর।

$(x+y)^n$ দ্বিপদী এর বিস্তৃতি

আমরা এ পর্যন্ত $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতি নিয়ে আলোচনা করেছি। এই পর্যায়ে আমরা দ্বিপদী বিস্তৃতির সাধারণ আকার $(x+y)^n$ নিয়ে আলোচনা করব যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা। $(x+y)^n$ এর বিস্তৃতি সাধারণভাবে দ্বিপদী উপপাদ্য নামে পরিচিত।

আমরা জানি,

$$(1+y)^n = 1+\binom{n}{1}y+\binom{n}{2}y^2+\binom{n}{3}y^3+\cdots+\binom{n}{r}y^r+\cdots+\binom{n}{n}y^n$$

এখন, $(x+y)^n = \left[x(1+\dfrac{y}{x})\right]^n = x^n(1+\dfrac{y}{x})^n$

$$\therefore\ (x+y)^n = x^n\left[1+\binom{n}{1}\left(\frac{y}{x}\right)+\binom{n}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\binom{n}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3+\cdots+\binom{n}{n}\left(\frac{y}{x}\right)^n\right]$$

$$\therefore\ (x+y)^n = x^n\left[1+\binom{n}{1}\frac{y}{x}+\binom{n}{2}\frac{y^2}{x^2}+\binom{n}{3}\frac{y^3}{x^3}+\cdots+\frac{y^n}{x^n}\right] \quad \left[\because\ \binom{n}{n}=1\right]$$

$$= x^n+\binom{n}{1}\left(x^n\cdot\frac{y}{x}\right)+\binom{n}{2}\left(x^n\cdot\frac{y^2}{x^2}\right)+\binom{n}{3}\left(x^n\cdot\frac{y^3}{x^3}\right)+\cdots+x^n\cdot\frac{y^n}{x^n}$$

$$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n$$

এটিই হচ্ছে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাধারণ আকার। লক্ষণীয় এই বিস্তৃতি $(1+y)^n$ এর অনুরূপ। এখানে x এর ঘাত n থেকে 0 পর্যন্ত যোগ করা হয়েছে। আরো লক্ষণীয়, প্রতি পদে x ও y এর ঘাতের যোগফল দ্বিপদীর ঘাতের সমান। প্রথম পদে x এর ঘাত n থেকে শুরু হয়ে সর্বশেষ পদে শূন্য। ঠিক বিপরীতভাবে y এর ঘাত প্রথম পদে শূন্য থেকে শুরু হয়ে শেষ পদে n হয়েছে।

উদাহরণ ৫. $(x+y)^5$ কে বিস্তৃত কর এবং উহা হইতে $(3+2x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

সমাধান: $(x+y)^5 = x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + y^5$

$= x^5 + 5x^4y + \dfrac{5\cdot 4}{1\cdot 2}x^3y^2 + \dfrac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}x^2y^3 + \dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}xy^4 + y^5$

$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতি $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

এখন $x = 3$ এবং $y = 2x$ বসাই

$(3+2x)^5 = 3^5 + 5\cdot 3^4(2x) + 10\cdot 3^3(2x)^2 + 10\cdot 3^2(2x)^3 + 5\cdot 3(2x)^4 + (2x)^5$

$= 243 + 810x + 1080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5$

$\therefore\ (3+2x)^5 = 243 + 810x + 1080x^2 + 720x^3 + 240x^4 + 32x^5$

উদাহরণ ৬. $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^6$ কে x এর ঘাতের অধঃক্রম অনুসারে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং x মুক্ত পদটি শনাক্ত কর।

সমাধান: দ্বিপদী উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^6 = x^6 + \binom{6}{1}x^5\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + \binom{6}{2}x^4\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2 + \binom{6}{3}x^3\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^3 + \cdots$

$= x^6 + 6x^3 + \dfrac{6\cdot 5}{1\cdot 2}x^4\dfrac{1}{x^4} + \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}x^3\dfrac{1}{x^6} + \cdots$

$= x^6 + 6x^3 + 15 + 20\dfrac{1}{x^3} + \cdots$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতি $x^6 + 6x^3 + 15 + 20\dfrac{1}{x^3} + \cdots$ এবং x মুক্ত পদ 15

উদাহরণ ৭. x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(2 - \dfrac{x}{2}\right)^7$ এর বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর। উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে $(1.995)^7$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান: $\left(2-\frac{x}{2}\right)^7 = 2^7+\binom{7}{1}2^6\left(-\frac{x}{2}\right)+\binom{7}{2}2^5\left(-\frac{x}{2}\right)^2+\binom{7}{3}2^4\left(-\frac{x}{2}\right)^3+\cdots$

$= 128+7\cdot 64\left(-\frac{x}{2}\right)+\frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot 32\left(\frac{x^2}{4}\right)+\frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 16\left(-\frac{x^3}{8}\right)+\cdots$

$\therefore\ \left(2-\frac{x}{2}\right)^7 = 128-224x+168x^2-70x^3+\cdots$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতি $\left(2-\frac{x}{2}\right)^7 = 128-224x+168x^2-70x^3+\cdots$

এখন, $2-\frac{x}{2} = 1.995$ বা, $\frac{x}{2} = 2-1.995$ সুতরাং $x = 0.01$

এখন $x = 0.01$ বসিয়ে পাই

$$\left(2-\frac{0.01}{2}\right)^7 = 128-224\times(0.01)+168\times(0.01)^2-70\times(0.01)^3+\cdots$$

বা, $(1.995)^7 = 125.7767$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)

নির্ণেয় মান $(1.995)^7 = 125.7767$

$n!$ এবং ${}^nC_r$ এর মান নির্ণয়

নিচের উদাহরণগুলো লক্ষ করি:

$2 = 2\cdot 1,\ 6 = 3\cdot 2\cdot 1,\ 24 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1,\ 120 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1,\ \cdots$

ডানদিকের গুণফলসমূহকে আমরা এখন সংক্ষেপে একটি সাংকেতিক চিহ্নের মাধ্যমে প্রকাশ করতে পারি।

$2 = 2\cdot 1 = 2!,\ 6 = 3\cdot 2\cdot 1 = 3!,\ 24 = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4!,\ 120 = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5!,\ \cdots$

এখন লক্ষ করি:

$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4\cdot(4-1)\cdot(4-2)\cdot(4-3)$

$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot(5-1)\cdot(5-2)\cdot(5-3)\cdot(5-4)$

$\therefore$ সাধারণভাবে লিখতে পারি, $n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ এবং $n!$ কে ফ্যাক্টোরিয়াল (Factorial) n বলা হয়। তদ্রুপ 3! কে ফ্যাক্টোরিয়াল তিন, 4! কে ফ্যাক্টোরিয়াল চার ইত্যাদি পড়া হয়।

আবার লক্ষ করি:

$$\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(1\cdot 2\cdot 3)\cdot(2\cdot 1)} = \frac{5!}{3!\times 2!} = \frac{5!}{3!\times(5-3)!}$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(1\cdot2\cdot3\cdot4)\cdot(3\cdot2\cdot1)} = \frac{7!}{4!\times3!} = \frac{7!}{4!\times(7-4)!}$$

$\therefore$ সাধারণভাবে আমরা বলতে পারি $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

ডান পাশের ফ্যাক্টোরিয়ালসমূহকে যে প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয় তা হলো,

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}^nC_r$$

$\therefore\ \binom{7}{4} = \dfrac{7!}{4!(7-4)!} = {}^7C_4$ এবং $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = {}^5C_3$

সুতরাং, $\binom{n}{r} = {}^nC_r$, অর্থাৎ, $\binom{n}{r}$ ও ${}^nC_r$ এর মান এক।

$$\therefore \binom{n}{1} = {}^nC_1, \binom{n}{2} = {}^nC_2, \binom{n}{3} = {}^nC_3, \cdots, \binom{n}{n} = {}^nC_n$$

আমরা জানি $\binom{n}{n} = {}^nC_n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!(0)!} = \dfrac{1}{0!}$

$\therefore\ 1 = \dfrac{1}{0!}$, অর্থাৎ $0! = 1$

মনে রাখতে হবে

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$$

$$\binom{n}{r} = {}^nC_r,\quad {}^nC_n = 1$$

$$\binom{n}{r} = {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!},\quad \binom{n}{0} = {}^nC_0 = 1$$

$$\binom{n}{n} = {}^nC_n = 1,\ 0! = 1$$

এখন দ্বিপদী উপপাদ্যতে আমরা $\binom{n}{r}$ কে ${}^nC_r$ দ্বারা প্রকাশ করব।

$$(1+y)^n = 1 + {}^nC_1y + {}^nC_2y^2 + {}^nC_3y^3 + \cdots + {}^nC_ry^r + \cdots + {}^nC_ny^n$$

বা, $(1+y)^n = 1 + ny + \dfrac{n(n-1)}{2!}y^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}y^3 + \cdots + y^n$

$$\boxed{(1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}y^3 + \cdots + y^n}$$

এবং অনুরূপভাবে,

$$(x+y)^n = x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + {}^nC_3x^{n-3}y^3 + \cdots + {}^nC_rx^{n-r}y^r + \cdots + {}^nC_ny^n$$

বা $(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n$

$$\boxed{(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n}$$

লক্ষণীয়: ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা n এর জন্য

দ্বিপদী বিস্তৃতি $(1+y)^n$ এর সাধারণ পদ বা $(r+1)$ তম পদ $T_{r+1} = \binom{n}{r}y^r$ বা, ${}^nC_ry^r$

এখানে, $\binom{n}{r}$ বা ${}^nC_r$ দ্বিপদী সহগ।

$$(x+y)^n = x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + {}^nC_3x^{n-3}y^3 + \cdots + {}^nC_ny^n$$

বা $(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n$

সাধারণ পদ বা $(r+1)$ তম পদ $T_{r+1} = \binom{n}{r}x^{n-r}y^r$ বা ${}^nC_rx^{n-r}y^r$ যেখানে $\binom{n}{r}$ বা ${}^nC_r$ দ্বিপদী সহগ।

উদাহরণ ৮. $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^5$ কে বিস্তৃত কর।

সমাধান: দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে

$$\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^5 = x^5 + {}^5C_1x^{5-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + {}^5C_2x^{5-2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 + {}^5C_3x^{5-3}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^3 + {}^5C_4x^{5-4}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^4 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^5$$

$$= x^5 - 5x^4\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}x^3\frac{1}{x^4} - \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}x^2\frac{1}{x^6} + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x\frac{1}{x^8} - \frac{1}{x^{10}}$$

$$= x^5 - 5x^2 + \frac{10}{x} - \frac{10}{x^4} + \frac{5}{x^7} - \frac{1}{x^{10}}$$

উদাহরণ ৯. $\left(2x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^8$ এর বিস্তৃতির প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর।

সমাধান: দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে, $\left(2x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)^8$

$$= (2x^2)^8 + {}^8C_1(2x^2)^7\left(-\frac{1}{x^2}\right) + {}^8C_2(2x^2)^6\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 + {}^8C_3(2x^2)^5\left(-\frac{1}{x^2}\right)^3 + \cdots$$

$$= 2^8\cdot x^{16} - 8\cdot 2^7\cdot x^{14}\cdot\frac{1}{x^2} + \frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot 2^6\cdot x^{12}\cdot\frac{1}{x^4} - \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2^5\cdot x^{10}\cdot\frac{1}{x^6} + \cdots$$

$$= 256x^{16} - 1024x^{12} + 1792x^8 - 1792x^4 + \cdots$$

উদাহরণ ১০. $\left(k-\dfrac{x}{3}\right)^7$ বিস্তৃতির k^3 এর সহগ 560

ক) $k=1$ হলে, চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

খ) x এর মান নির্ণয় কর।

গ) রাশিটির বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ x^5 এর সহগের 15 গুণ হলে k এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) $k=1$ হলে, বীজগাণিতিক রাশিটি $\left(1-\dfrac{x}{3}\right)^7$

দ্বিপদী উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\left(1-\frac{x}{3}\right)^7 = {}^7C_0\left(-\frac{x}{3}\right)^0 + {}^7C_1\left(-\frac{x}{3}\right)^1 + {}^7C_2\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + {}^7C_3\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1 - 7\cdot\frac{x}{3} + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}\cdot\frac{x^2}{9} - \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{27} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{7x}{3} + \frac{7x^2}{3} - \frac{35x^3}{27} + \cdots$$

খ) দ্বিপদী উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$\begin{aligned}\left(k-\frac{x}{3}\right)^7 &= k^7 + {}^7C_1k^6\left(-\frac{x}{3}\right) + {}^7C_2k^5\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + {}^7C_3k^4\left(-\frac{x}{3}\right)^3\\ &\quad + {}^7C_4k^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + {}^7C_5k^2\left(-\frac{x}{3}\right)^5 + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= k^7 - 7k^6\cdot\frac{x}{3} + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}k^5\cdot\frac{x^2}{9} - \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}k^4\cdot\frac{x^3}{27}\\ &\quad + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}k^3\cdot\frac{x^4}{81} - \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}k^2\cdot\frac{x^5}{243} + \cdots\end{aligned}$$

$$= k^7 - \frac{7x}{3}\cdot k^6 + \frac{7x^2}{3}\cdot k^5 - \frac{35x^3}{27}\cdot k^4 + \frac{35x^4}{81}\cdot k^3 - \frac{7x^5}{81}\cdot k^2 + \cdots$$

এখানে k^3 এর সহগ $\dfrac{35x^4}{81}$

শর্তমতে, $\dfrac{35x^4}{81} = 560$ বা, $x^4 = \dfrac{560 \times 81}{35}$ বা, $x^4 = 1296$

$\therefore\ x = 6$

গ) ঠিক উপরের $\left(k - \dfrac{x}{3}\right)^7$ এর বিস্তৃতির ফলাফল থেকে পাই,

$$\left(k - \frac{x}{3}\right)^7 = k^7 - \frac{7x}{3} \cdot k^6 + \frac{7x^2}{3} \cdot k^5 - \frac{35x^3}{27} \cdot k^4 + \frac{35x^4}{81} \cdot k^3 - \frac{7x^5}{81} \cdot k^2 + \cdots$$

এখানে, x^3 এর সহগ $\dfrac{-35k^4}{27}$ এবং x^5 এর সহগ $\dfrac{-7k^2}{81}$

শর্তমতে, $\dfrac{-35k^4}{27} = -\dfrac{7k^2}{81} \times 15$ বা, $\dfrac{k^4}{k^2} = \dfrac{27 \times 7 \times 15}{35 \times 81}$ বা, $k^2 = 1$

$\therefore\ k = 1$

অনুশীলনী ১০.২

১. $(1 + 2x + x^2)^3$ এর বিস্তৃতিতে-

(i) পদসংখ্যা 4 (ii) ২য় পদ $6x$ (iii) শেষ পদ x^6

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii ও iii

$\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^n$, যেখানে n জোড় সংখ্যা। এই তথ্য থেকে ২ ও ৩ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

২. $(r + 1)$ তম পদটি x বর্জিত হলে r এর মান কত?

ক) 0 খ) $\dfrac{n}{2}$ গ) n ঘ) $2n$

৩. $n = 4$ হলে, চতুর্থ পদ কত?

ক) 4 খ) $4x$ গ) $\dfrac{4}{x}$ ঘ) $\dfrac{4}{x^2}$

৪. $(x + y)^5$ -এর বিস্তৃতিতে দ্বিপদী সহগগুলি হল:

ক) $5, 10, 10, 5$ খ) $1, 5, 10, 10, 5, 1$

গ) $10, 5, 5, 10$ ঘ) $1, 2, 3, 3, 2, 1$

৫. $(1 - x)\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^8$ -এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ

ক) -1 খ) $\frac{1}{2}$ গ) 3 ঘ) $-\frac{1}{2}$

৬. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4$ -এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদ কত?
ক) 4 খ) 6 গ) 8 ঘ) 0

৭. $(x+y)^4$ বিস্তৃতির সহগগুলি সাজালে আমরা পাই-

ক)
$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&4&&&& \\ &&&1&&4&&1& \\ &&1&&5&&5&&1 \\ &1&&6&&10&&6&&1 \end{array}$$

খ)
$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&2&&1& \\ &&1&&3&&3&&1 \\ &1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

গ)
$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&2&&&& \\ &&&2&&3&&2& \\ &&1&&5&&5&&2 \\ &2&&7&&10&&7&&2 \end{array}$$

ঘ)
$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&6&&&& \\ &&&6&&12&&6& \\ &&6&&18&&18&&6 \\ &6&&24&&36&&24&&6 \end{array}$$

৮. নিম্নোক্ত প্রতিটি ক্ষেত্রে বিস্তৃত কর:
ক) $(2+x^2)^5$ খ) $\left(2-\frac{1}{2x}\right)^6$

৯. নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহের প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর।
ক) $(2+3x)^6$ খ) $\left(4-\frac{1}{2x}\right)^5$

১০. $\left(p-\frac{1}{2}x\right)^6=r-96x+sx^2+\cdots$ হলে, p, r এবং s এর মান নির্ণয় কর।

১১. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতির x^3 এর সহগ নির্ণয় কর।

১২. x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(2+\frac{x}{4}\right)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। উহার সাহায্যে $(1.9975)^6$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

১৩. দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে $(1.99)^5$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

১৪. $\left(1+\frac{x}{4}\right)^n$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দ্বিগুণ। n এর মান নির্ণয় কর। বিস্তৃতির পদসংখ্যা ও মধ্যপদ নির্ণয় কর।

১৫. ক) $\left(2k-\frac{x}{2}\right)^5$ এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 720 হলে x এর মান নির্ণয় কর।

খ) $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 হলে k এর মান নির্ণয় কর।

১৬. $A=(1+x)^7$ এবং $B=(1-x)^8$

ক) প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে A এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

২০১৮

খ) B এর বিস্তৃতির চার পদ পর্যন্ত নির্ণয় করে উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(0.99)^8$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

গ) AB এর বিস্তৃতির x^7 এর সহগ নির্ণয় কর।

১৭. $(A + Bx)^n$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

ক) $A = 1,\ B = 2$ এবং $n = 5$ হলে প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে রাশিটির বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

খ) $B = 3$ এবং $n = 7$ হলে রাশিটির বিস্তৃতির x^4 এর সহগ 22680 হয়। A এর মান নির্ণয় কর।

গ) $A = 2$ এবং $B = 1$ হলে রাশিটির বিস্তৃতির পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদের সহগ সমান হয়। n এর মান নির্ণয় কর।

১৮. a_1, a_2, a_3 a_4 যদি $(1 + x)^n$ এর বিস্তৃতির চারটি ক্রমিক পদ হয়ে থাকে তাহলে প্রমাণ কর যে $\dfrac{a_1}{a_1 + a_2} + \dfrac{a_3}{a_3 + a_4} = \dfrac{2a_2}{a_2 + a_3}$

১৯. কোনটি বড় $99^{50} + 100^{50}$ না 101^{50}?

অধ্যায় ১১

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (Coordinate Geometry)

বিন্দু, সরলরেখা ও বক্ররেখার বীজগাণিতিক প্রকাশকে জ্যামিতির যে অংশে অধ্যয়ন করা হয় তাই স্থানাঙ্ক জ্যামিতি নামে পরিচিত। জ্যামিতির এই অংশ বিশ্লেষণ জ্যামিতি (Analytic Geometry) নামেও পরিচিত। সমতলে বিন্দু পাতনের মাধ্যমে সরল বা বক্ররেখা অথবা এদের দ্বারা তৈরি জ্যামিতিক ক্ষেত্র যথা, ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বৃত্ত ইত্যাদির চিত্র প্রকাশ করা হয়। সমতলে বিন্দু পাতনের পদ্ধতির সূচনা করেন বিখ্যাত ফরাসি গণিতবিদ Rene Descartes (ডেকার্তে নামে পরিচিত)। ডেকার্তের প্রবর্তিত জ্যামিতির এই স্থানাঙ্ক (Coordinates) প্রথা তাঁরই নামানুসারে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (Cartesian Coordinates) নামে পরিচিতি। স্থানাঙ্ক জ্যামিতি বা বিশ্লেষণ জ্যামিতি মূলত কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নির্ভর। তাই ডেকার্তেকে বিশ্লেষণ জ্যামিতির প্রবর্তক বলা যায়।

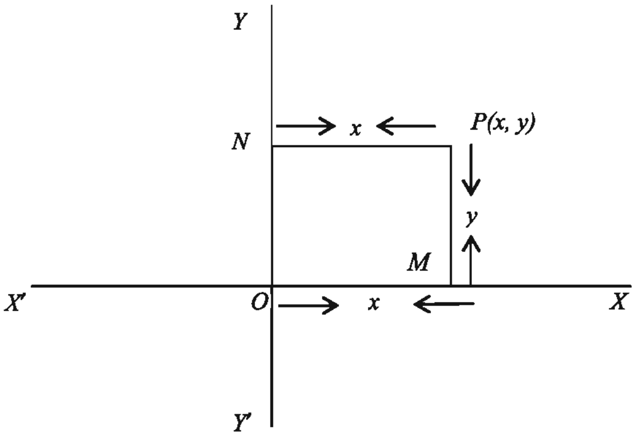
এই অধ্যায়ের প্রথম অংশে শিক্ষার্থীদের সমতলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ধারণা প্রদানের মাধ্যমে দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয়ের কৌশল আলোচনা করা হবে। দ্বিতীয় অংশে সরলরেখার মাধ্যমে সৃষ্ট যেকোনো ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতি আলোচনা করা হবে এবং তৃতীয় অংশে সরলরেখার ঢাল নির্ণয় এবং দুইটি বিন্দুর সংযোগে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়ের কৌশল ব্যাখ্যা করা হবে। বক্ররেখা দ্বারা সৃষ্ট কোনো জ্যামিতিক চিত্র বা সমীকরণের আলোচনা এখানে করা হবে না। উচ্চতর শ্রেণিতে এ সংক্রান্ত বিশদ আলোচনা করা হবে। অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা -

- সমতলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করতে পারবে।
- সরলরেখার ঢালের ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করতে পারবে।
- স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে।
- বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে।
- বিন্দুপাতনের মাধ্যমে ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সংক্রান্ত জ্যামিতিক অঙ্কন করতে পারবে।
- সরলরেখার সমীকরণ লেখচিত্রে উপস্থাপন করতে পারবে।

আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (Rectangular Cartesian Coordinates)

সমতলের ধারণা পূর্ববর্তী শ্রেণিতে দেওয়া হয়েছে। একটি টেবিলের উপরিভাগ, ঘরের মেঝে, বই-এর উপরিভাগ এমন কি যে কাগজের উপর লিখা হয় এদের প্রত্যেকেই সমতল। একটি ফুটবলের উপরিভাগ বা একটি বোতলের উপরিভাগ হলো বক্রতল। এই অংশে সমতলে অবস্থিত কোনো বিন্দুর সঠিক অবস্থান নির্ণয়ের কৌশল আলোচনা করা হবে। সমতলে অবস্থিত কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুর সঠিক অবস্থান নির্ণয়ের জন্য ঐ সমতলে অঙ্কিত দুইটি পরস্পরছেদী সরলরেখা হতে নির্দিষ্ট বিন্দুর দূরত্ব জানা প্রয়োজন। এর কারণ হিসেবে বলা যায় পরস্পরছেদী দুইটি সরলরখা হতে কোনো নির্দিষ্ট দূরত্বে কেবলমাত্র একটি বিন্দুই থাকতে পারে।

কোনো সমতলে পরস্পর সমকোণে ছেদ করে এরূপ দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' আঁকলে XOX' কে x অক্ষ (x-axis), YOY' কে y অক্ষ (y-axis) এবং ছেদ বিন্দু 'O' কে মূলবিন্দু (origin) বলা হয়।



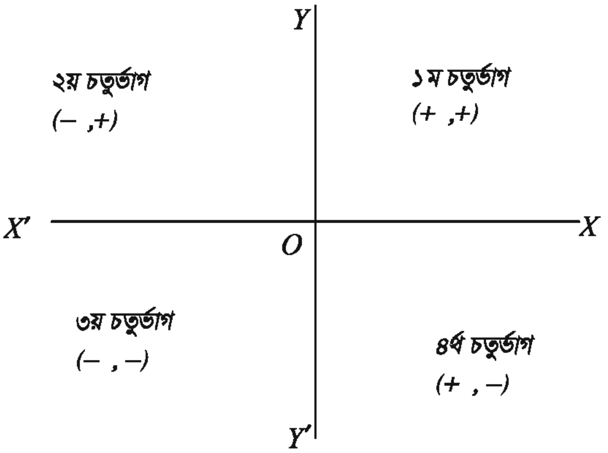
এখন ধরে নিই অক্ষদ্বয়ের সমতলে যেকোনো বিন্দু P। উক্ত P বিন্দু থেকে XOX' অর্থাৎ, x অক্ষ এবং YOY' অর্থাৎ y অক্ষের উপর লম্ব যথাক্রমে PM এবং PN। তাহলে y অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= NP = OM = x$ কে P বিন্দুর ভুজ (abscissa) বা x স্থানাঙ্ক (x-coordinate) বলে। আবার x অক্ষ হতে P বিন্দুর দূরত্ব $= MP = ON = y$ কে P বিন্দুর কোটি (ordinate) বা y স্থানাঙ্ক (y-coordinate) বলা হয়। ভুজ ও কোটিকে এক সাথে স্থানাঙ্ক বলা হয়। সুতরাং চিত্রে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলতে y অক্ষ ও x অক্ষ হতে P বিন্দুর লম্ব দূরত্ব বোঝায় এবং তাদের x ও y দ্বারা নির্দেশ করে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(x, y)$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

বিন্দুর স্থানাঙ্ক সূচক (x, y) একটি ক্রমজোড় বুঝায় যার প্রথমটি ভুজ ও দ্বিতীয়টি কোটি নির্দেশ করে। তাই $x \neq y$ হলে (x, y) ও (y, x) দ্বারা দুইটি ভিন্ন বিন্দু বুঝায়। সুতরাং পরস্পর সমকোণে ছেদ করে এরূপ একজোড়া অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ককে আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বলা হয়। বিন্দুটি y অক্ষের ডানে থাকলে ভুজ ধনাত্মক ও বামে থাকলে ভুজ ঋণাত্মক হবে। আবার বিন্দুটি x অক্ষের উপরে থাকলে কোটি ধনাত্মক এবং নিচে থাকলে কোটি ঋণাত্মক হবে। x অক্ষের উপর কোটি

শূন্য এবং y অক্ষের উপর ভুজ শূন্য হবে।

সুতরাং কোনো বিন্দুর ধনাত্মক ভুজ ও কোটি যথাক্রমে OX ও OY বরাবর বা তাদের সমান্তরাল দিকে থাকবে। একইভাবে ঋণাত্মক ভুজ ও কোটি OX' ও OY' বরাবর বা তাদের সমান্তরাল দিকে থাকবে।

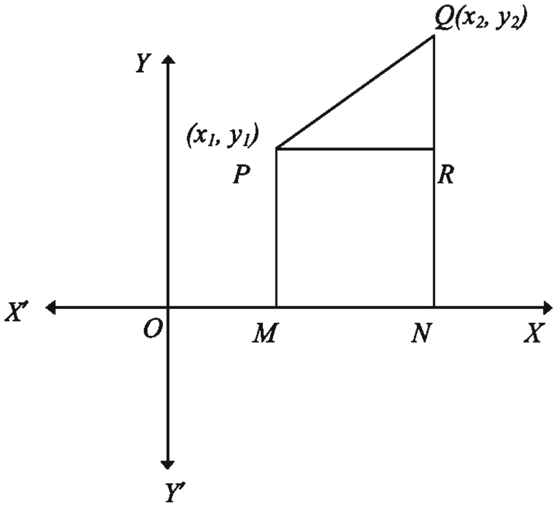
কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় দ্বারা সমতল XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX$ এই চারটি ভাগে বিভক্ত হয়। এদের প্রত্যেকটিকে চতুর্ভাগ (quadrant) বলা হয়।
XOY চতুর্ভাগকে প্রথম ধরা হয় এবং ঘড়ির কাঁটার আবর্তনের বিপরীত দিকে পর্যায়ক্রমে দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ ধরা হয়। কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের চিহ্ন অনুসারে বিন্দুর অবস্থান বিভিন্ন চতুর্ভাগে থাকে।



দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between two points)

মনে করি, $P(x_1, y_1)$ এবং $Q(x_2, y_2)$ একটি সমতলে অবস্থিত দুইটি ভিন্ন বিন্দু। P ও Q বিন্দু থেকে x অক্ষের উপর লম্ব PM ও QN আঁকি। আবার P বিন্দু থেকে QN এর উপর লম্ব PR আঁকি।

এখন P বিন্দুর ভুজ $= OM = x_1$ এবং P বিন্দুর কোটি $= MP = y_1$।
Q বিন্দুর ভুজ $= ON = x_2$ ও কোটি $NQ = y_2$।
চিত্র হতে আমরা পাই,
$PR = MN = ON - OM = x_2 - x_1$
$QR = NQ - NR = NQ - MP = y_2 - y_1$
অঙ্কন অনুসারে, PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং PQ ত্রিভুজের অতিভুজ। তাই পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী
$PQ^2 = PR^2 + QR^2$
বা, $PQ = \pm\sqrt{PR^2 + QR^2}$
বা, $PQ = \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



$\therefore$ P বিন্দু হতে Q বিন্দুর দূরত্ব, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

যেহেতু দূরত্ব সবসময় অঋণাত্মক হয় সেহেতু ঋণাত্মক মান পরিহার করা হয়েছে।

আবার একই নিয়মে Q বিন্দু হতে P বিন্দুর দূরত্ব,

$$QP = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$\therefore\ PQ = QP$।

P বিন্দু হতে Q বিন্দু বা Q বিন্দু হতে P বিন্দুর দূরত্ব সমান।

অর্থাৎ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = QP$

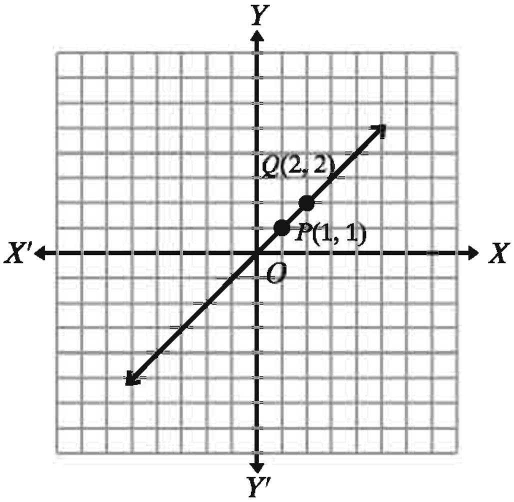
অনুসিদ্ধান্ত ১. মূলবিন্দু $(0, 0)$ হতে সমতলে অবস্থিত যেকোনো বিন্দু $P(x, y)$ এর দূরত্ব

$$PQ = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

উদাহরণ ১. $(1, 1)$ এবং $(2, 2)$ বিন্দু দুইটি একটি সমতলে চিহ্নিত কর। এদের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $P(1, 1)$ এবং $Q(2, 2)$ প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়। চিত্রে, xy সমতলে বিন্দুদ্বয়কে চিহ্নিত করা হলো। বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$= \sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2}$
$= \sqrt{1^2 + 1^2}$
$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

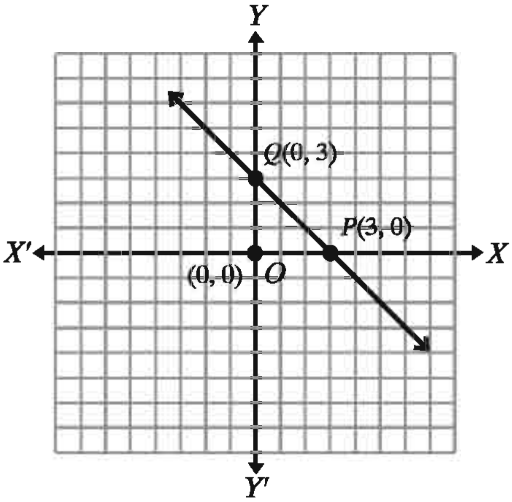


উদাহরণ ২. মূলবিন্দু $O(0, 0)$ এবং অপর দুইটি বিন্দু $P(3, 0)$ ও $Q(0, 3)$ সমতলে চিহ্নিত কর। প্রত্যেকের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। তিনটি বিন্দু যোগ করলে যে জ্যামিতিক চিত্র অঙ্কিত হয় তার নাম কি এবং কেন?

সমাধান: বিন্দু তিনটির অবস্থান সমতলে দেখানো হলো।

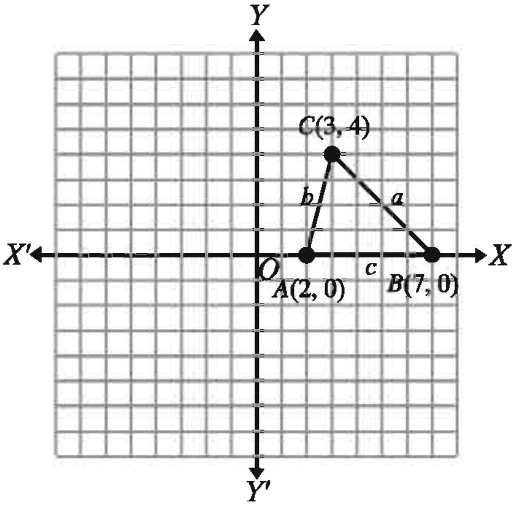
দূরত্ব $OP = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2}$
$= \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{3^2} = 3$ একক
দূরত্ব $OQ = \sqrt{(0-0)^2 + (3-0)^2}$
$= \sqrt{0^2 + 3^2} = \sqrt{3^2} = 3$ একক
দূরত্ব $PQ = \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2}$
$= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ একক

জ্যামিতিক চিত্রটির নাম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ কারণ এর দুই বাহু OP এবং OQ এর দৈর্ঘ্য সমান।



উদাহরণ ৩. একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $A(2, 0), B(7, 0)$ ও $C(3, 4)$। সমতলে এদের অবস্থান দেখাও এবং ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ত্রিভুজটির পরিসীমা পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

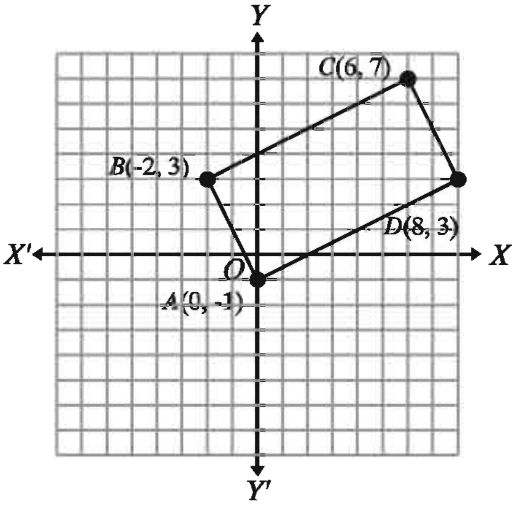
সমাধান: xy সমতলে $A(2,0), B(7,0)$ ও $C(3,4)$ এর অবস্থান দেখানো হলো। ABC ত্রিভুজের,
AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7-2)^2+(0-0)^2}$
$= \sqrt{5^2} = 5$ একক
BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-7)^2+(4-0)^2}$
$= \sqrt{(-4)^2+4^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ একক
AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-2)^2+(4-0)^2}$
$= \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$ একক
$\therefore$ ত্রিভুজটির পরিসীমা $= (AB+BC+AC)$ [বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি]
$= (5+4\sqrt{2}+\sqrt{17})$ একক $= 14.77996$ একক (প্রায়)



উদাহরণ ৪. দেখাও যে, $(0,-1), (-2,3)$, $(6,7)$ এবং $(8,3)$ বিন্দুগুলো একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু।

সমাধান: মনে করি, $A(0,-1)$, $B(-2,3)$, $C(6,7)$ এবং $D(8,3)$ প্রদত্ত বিন্দুসমূহ। xy সমতলে এদের অবস্থান দেখানো হলো।

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-0)^2+(3-(-1))^2}$
$= \sqrt{(-2)^2+(4)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$ একক
CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-6)^2+(3-7)^2}$
$= \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$ একক
$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য = CD বাহুর দৈর্ঘ্য
আবার,
AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-0)^2+(3-(-1))^2}$
$= \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ একক
BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-(-2))^2+(7-3)^2}$
$= \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ একক
$\therefore$ AD বাহুর দৈর্ঘ্য = BC বাহুর দৈর্ঘ্য
$\therefore$ বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান।
সুতরাং বলা যায়, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।



BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-(-2))^2+(3-3)^2} = \sqrt{10^2+(0)^2} = \sqrt{100} = 10$ একক

এখন, $BD^2 = 100,\ AB^2 = (2\sqrt{5})^2 = 20,\ AD^2 = (4\sqrt{5})^2 = 80$

$\therefore\ AB^2 + AD^2 = 20 + 80 = 100 = BD^2$

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী ABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle BAD$ সমকোণ। সুতরাং এ দ্বারা প্রমাণিত হলো যে, $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র।

উদাহরণ ৫. দেখাও যে, $(-3,-3),(0,0)$ ও $(3,3)$ বিন্দু তিনটি দ্বারা কোনো ত্রিভুজ তৈরি করা যায় না।

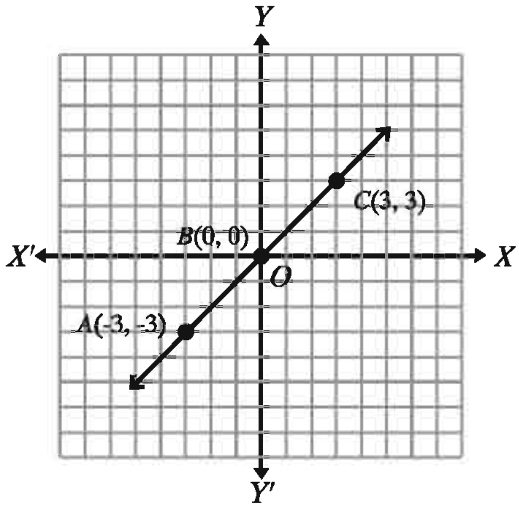
সমাধান: ধরি, $A(-3,-3)$, $B(0,0)$ ও $C(3,3)$ প্রদত্ত বিন্দুসমূহ। xy সমতলে তাদের অবস্থান দেখানো হলো।

আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বড়। ধরে নিই ABC একটি ত্রিভুজ এবং AB, BC ও AC এর তিনটি বাহু।

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0-(-3))^2+(0-(-3))^2}$
$= \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ একক
BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2}$
$= \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ একক
AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3+3)^2+(3+3)^2}$
$= \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ একক

সুতরাং $AB+BC = 3\sqrt{2}+3\sqrt{2} = 6\sqrt{2} = AC$
অর্থাৎ দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর সমান। সুতরাং এদের দ্বারা কোনো ত্রিভুজ গঠন সম্ভব নয়।

আবার xy সমতলে অবস্থান দেখে বলা যায় যে বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থান করে এবং এদের দ্বারা কোনো ত্রিভুজ গঠন সম্ভব নয়।



অনুশীলনী ১১.১

১. প্রতিক্ষেত্রে প্রদত্ত বিন্দুসমূহের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

ক) $(2,3)$ ও $(4,6)$	খ) $(-3,7)$ ও $(-7,3)$
গ) (a,b) ও (b,a)	ঘ) $(0,0)$ ও $(\sin\theta,\ \cos\theta)$
ঙ) $\left(-\frac{3}{2},-1\right)$ ও $\left(\frac{1}{2},2\right)$	

২. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে $A(2,-4),B(-4,4)$ ও $C(3,3)$। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং দেখাও যে, এটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

৩. $A(2,5)$, $B(-1,1)$ ও $C(2,1)$ একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং দেখাও যে এটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

৪. $A(1,2)$, $B(-3,5)$ ও $C(5,-1)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা যায় কিনা যাচাই কর।

৫. মূলবিন্দু থেকে $(-5,5)$ ও $(5,k)$ বিন্দুদ্বয় সমদূরবর্তী হলে k এর মান নির্ণয় কর।

৬. দেখাও যে, $A(2,2)$, $B(-2,-2)$ এবং $C(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। এর পরিসীমা তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

৭. দেখাও যে, $A(-5,0)$, $B(5,0)$, $C(5,5)$ ও $D(-5,5)$ একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু।

৮. $A(-2,-1)$, $B(5,4)$, $C(6,7)$ এবং $D(-1,2)$ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়তক্ষেত্র তা নির্ণয় কর।

৯. $A(10,5), B(7,6), C(-3,5)$ বিন্দুগুলোর মধ্যে কোনটি $P(3,-2)$ এর সবচেয়ে নিকটবর্তী ও কোনটি সবচেয়ে দূরবর্তী?

১০. $P(x,y)$ বিন্দু থেকে y অক্ষের দূরত্ব এবং $Q(3,2)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান। প্রমাণ কর যে, $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$।

১১. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ $A(2,-1)$, $B(-4,2)$, $C(2,5)$। ত্রিভুজটির মধ্যমা AD এর মান নির্ণয় কর।

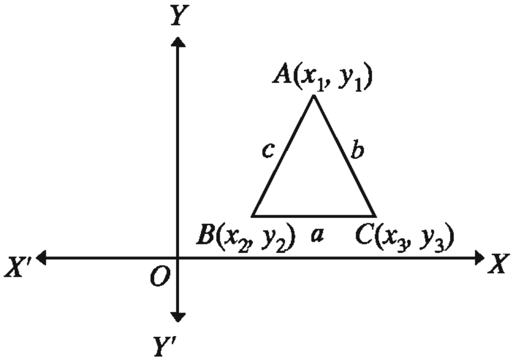
ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (Area of triangles)

আমরা জানি, তিনটি ভিন্ন বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থান না করলে ঐ তিনটি বিন্দুকে সরলরেখা দ্বারা যোগ করলে একটি ত্রিভুজক্ষেত্র পাওয়া যায়। উক্ত ত্রিভুজক্ষেত্রটি বাহুভেদে এবং কোণভেদে ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। এই অংশে আমরা একটি মাত্র সূত্রের সাহায্যে যেকোনো ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে সক্ষম হব। একই সূত্রের সাহায্যে যেকোনো চতুর্ভুজকে দুইটি ত্রিভুজ ক্ষেত্রে বিভক্ত করে চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করাও সম্ভব হবে। এক্ষেত্রে আমরা ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির পরিসীমা (বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি) এবং বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করব। যেকোনো ত্রিভুজ আকৃতি বা কোণাকৃতির জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের এই পদ্ধতি অর্থাৎ বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ। অর্থাৎ জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে এটি খুবই কার্যকর। কারণ হিসেবে বলা যায় ত্রিকোণাকার বা চৌকোণাকার জমির শীর্ষবিন্দুগুলোর স্থানাঙ্ক যদি জানা না থাকে বা সম্ভব না হয় কিন্তু যদি বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকে তাহলেও আমরা ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে সক্ষম হব। এই অংশে আমরা দুইটি পদ্ধতির মাধ্যমে ত্রিভুজ বা বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করবো।

পদ্ধতি ১: বাহুর দৈর্ঘ্য ও পরিসীমার সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয়

ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র: পার্শ্বের চিত্রে ABC একটি ত্রিভুজ দেখানো হয়েছে। $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ ও $C(x_3,y_3)$ তিনটি ভিন্ন বিন্দু এবং AB, BC ও CA ত্রিভুজের তিনটি বাহু। দূরত্ব নির্ণয়ের সূত্রের সাহায্যে সহজেই AB, BC ও CA বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় সম্ভব। যেমন:

AB বাহুর দৈর্ঘ্য c ধরে
$c = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ একক
BC বাহুর দৈর্ঘ্য a ধরে
$a = \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2}$ একক
AC বাহুর দৈর্ঘ্য b ধরে
$b = \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}$ একক



এখন ত্রিভুজটির পরিসীমা $2s$ ধরে

$2s = a + b + c$ [পরিসীমা = বাহু তিনটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি]

অর্থাৎ $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ একক, এখানে s হলো ত্রিভুজের পরিসীমার অর্ধেক।

আমরা s এবং a, b, c এর সাহায্যে সহজেই যেকোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারি।

ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র

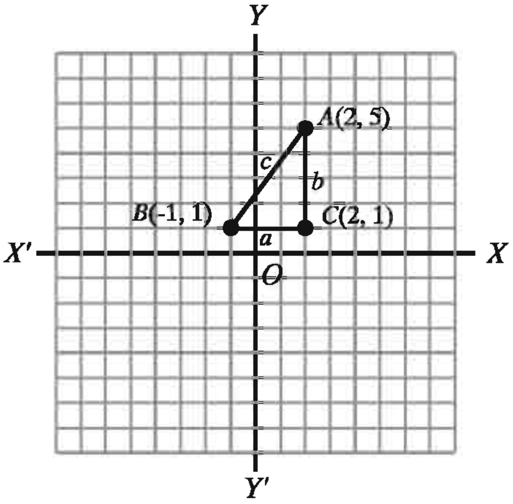
ত্রিভুজ ABC এর AB বাহুর দৈর্ঘ্য c, BC বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং CA বাহুর দৈর্ঘ্য b এবং পরিসীমা $2s$ হলে $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক [নবম-দশম শ্রেণির গণিত বই এর পরিমিতি অংশে প্রমাণ দেওয়া আছে। শিক্ষার্থীরা প্রমাণটি দেখে নিবে।]

নিম্নোক্ত উদাহরণসমূহের মাধ্যমে সূত্রটির ব্যবহার সহজেই বুঝা যাবে।

লক্ষণীয়: বিভিন্ন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের বিভিন্ন সূত্র রয়েছে, কিন্তু একটি মাত্র সূত্রের সাহায্যে আমরা এখানে যেকোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে সক্ষম হব।

উদাহরণ ৬. একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু $A(2, 5)$, $B(-1, 1)$ ও $C(2, 1)$। ত্রিভুজটির একটি মোটামুটি চিত্র আঁক এবং পরিসীমা ও বাহুর দৈর্ঘ্যের মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ত্রিভুজটি কোন ধরনের ত্রিভুজ চিত্র দেখে আন্দাজ কর এবং তার সপক্ষে যুক্তি দাও।

সমাধান: চিত্রে ত্রিভুজটির চিত্র দেখানো হলো।



AB বাহুর দৈর্ঘ্য, $c = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-5)^2}$
$= \sqrt{9+16} = 5$ একক
BC বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{(2+1)^2 + (1-1)^2}$
$= \sqrt{9+0} = 3$ একক
AC বাহুর দৈর্ঘ্য, $b = \sqrt{(2-2)^2 + (1-5)^2}$
$= \sqrt{0+16} = 4$ একক
$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(3+4+5)$
$= \frac{12}{2} = 6$ একক
$\therefore$ ক্ষেত্রফল=$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক
$= \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}$ বর্গ একক
$= \sqrt{6 \times 3 \times 2 \times 1}$ বর্গ একক
$= \sqrt{6 \times 6} = 6$ বর্গ একক

চিত্র দেখে আমরা বুঝতে পারি এটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ। পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে এটি সহজেই প্রমাণ করা যায়।

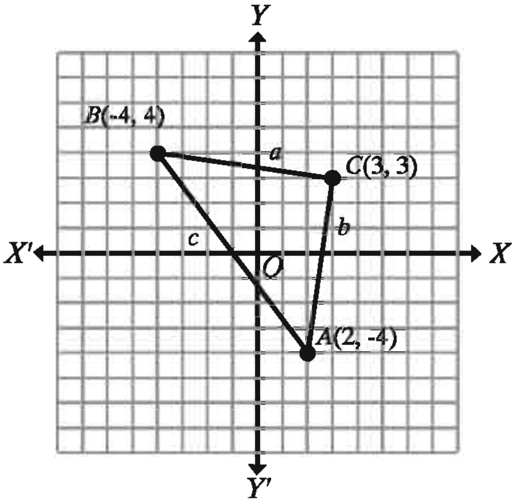
$AB^2 = c^2 = 5^2 = 25$, $BC^2 = a^2 = 3^2 = 9$, $CA^2 = b^2 = 4^2 = 16$

$\therefore\ BC^2 + CA^2 = 9 + 16 = 25 = AB^2$

$\therefore\ ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ। AB অতিভুজ ও $\angle ACB$ সমকোণ।

উদাহরণ ৭. $A(2,-4), B(-4,4)$ এবং $C(3,3)$ একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ। ত্রিভুজটি আঁক এবং বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। চিত্র দেখে ত্রিভুজটির একটি নাম দাও এবং এর সপক্ষে যুক্তি দেখাও।

সমাধান: ত্রিভুজটির চিত্র আঁকা হলো।



$AB = c = \sqrt{(-4-2)^2 + (4-(-4))^2}$
$= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ একক
$BC = a = \sqrt{(3-(-4))^2 + (3-4)^2}$
$= \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ একক
$CA = b = \sqrt{(2-3)^2 + (-4-3)^2}$
$= \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ একক
এখন, $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(10+5\sqrt{2}+5\sqrt{2})$
$= 5 + 5\sqrt{2}$ একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(5+5\sqrt{2})(5+5\sqrt{2}-10)(5+5\sqrt{2}-5\sqrt{2})(5+5\sqrt{2}-5\sqrt{2})}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(5+5\sqrt{2})(5\sqrt{2}-5)\cdot 5\cdot 5}$ বর্গ একক

$= 5\sqrt{(5+5\sqrt{2})(5\sqrt{2}-5)}$ বর্গ একক

$= 5\sqrt{(5\sqrt{2})^2-5^2} = 5\sqrt{50-25} = 5\sqrt{25}$ বর্গ একক $= 25$ বর্গ একক

প্রদত্ত ত্রিভুজটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। কেননা $BC = CA = 5\sqrt{2}$ একক। অর্থাৎ, ত্রিভুজটির দুইটি বাহু সমান।

আবার, $AB^2 = 10^2 = 100$

$BC^2 + CA^2 = (5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 = 50 + 50 = 100$

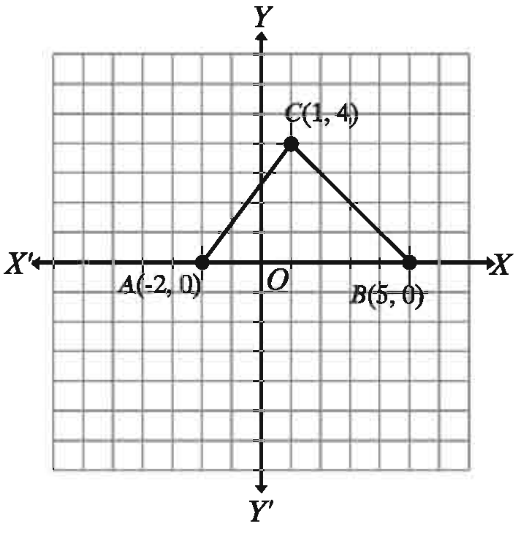
$\therefore\ AB^2 = BC^2 + CA^2$

$\therefore\ \triangle ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

অর্থাৎ $\triangle ABC$ একটি সমকোণী ও সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

উদাহরণ ৮. একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে $A(-2,0), B(5,0)$ এবং $C(1,4)$। প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: ত্রিভুজটির চিত্র দেখানো হলো।



$AB = c = \sqrt{(5-(-2))^2+(0-0)^2}$
$= \sqrt{49} = 7$ একক
$BC = a = \sqrt{(1-5)^2+(4-0)^2}$
$= \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ একক
$CA = b = \sqrt{(-2-1)^2+(0-4)^2}$
$= \sqrt{9+16} = 5$ একক
$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(7+4\sqrt{2}+5)$
$= \frac{1}{2}(12+4\sqrt{2}) = 6+2\sqrt{2}$ একক

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(6+2\sqrt{2}-7)(6+2\sqrt{2}-4\sqrt{2})(6+2\sqrt{2}-5)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(2\sqrt{2}-1)(6-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(6-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)}$ বর্গ একক

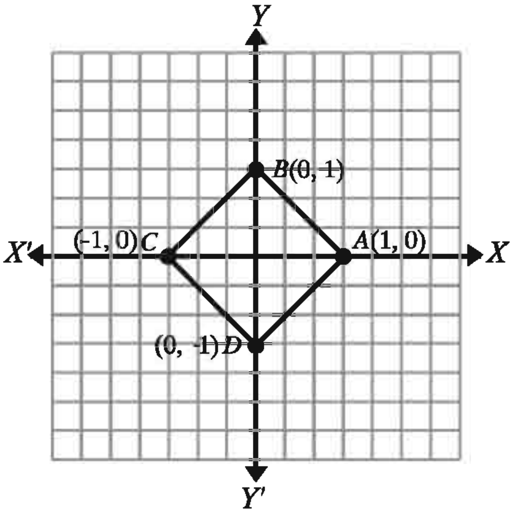
$= \sqrt{(6^2-(2\sqrt{2})^2)((2\sqrt{2})^2-1^2)} = \sqrt{28\cdot 7} = 14$ বর্গ একক

প্রদত্ত ত্রিভুজটি একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ। কারণ এর কোনো বাহুই অপর কোনো বাহুর সমান নয়।

লক্ষণীয়: যে তিনটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা হলো তার ১মটি সমকোণী, ২য়টি সমদ্বিবাহু ও সমকোণী এবং তৃতীয়টি বিষমবাহু ত্রিভুজ। একটি মাত্র সূত্রের সাহায্যে প্রত্যেকটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্ভব হয়েছে। অন্য যেকোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রেও ঠিক একইভাবে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা সম্ভব হবে। অনুশীলনীতে এ রকম আরও কয়েকটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত সমস্যা থাকবে।

উদাহরণ ৯. একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ এবং $D(0,-1)$। চতুর্ভুজটির চিত্র আঁক এবং যেকোনো দুই বাহু ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয়ের মাধ্যমে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: পার্শ্বের চিত্রে বিন্দু পাতনের মাধ্যমে $ABCD$ চতুর্ভুজটি দেখানো হলো। AB, BC, CD এবং DA চতুর্ভুজটির চারটি বাহু এবং AC ও BD চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ।



বাহু $AB = c = \sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2}$
$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ একক
বাহু $BC = a = \sqrt{(0+1)^2+(1-0)^2}$
$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ একক
কর্ণ $AC = b = \sqrt{(1+1)^2+(0-0)^2}$
$= \sqrt{2^2} = 2$ একক
বাহু $CD = \sqrt{(-1-0)^2+(0+1)^2} = \sqrt{2}$ একক
বাহু $DA = \sqrt{(0-1)^2+(-1-0)^2} = \sqrt{2}$ একক
দেখা যাচ্ছে, $AB = BC = CD = DA = \sqrt{2}$ একক

$\therefore$ চতুর্ভুজটি একটি বর্গ বা রম্বস।

এখন, $AB^2 + BC^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 2+2 = 4 = AC^2$

$\therefore$ চতুর্ভুজটি একটি বর্গক্ষেত্র।

চতুর্ভুজ $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2\times$ ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল।

এখন ত্রিভুজ ABC এর পরিসীমা, $2s = AB+BC+CA = \sqrt{2}+\sqrt{2}+2 = 2+2\sqrt{2}$ একক

$s = \frac{1}{2}(2+2\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2}$ একক

$\therefore$ ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-2)(1+\sqrt{2}-\sqrt{2})}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(\sqrt{2}+1)\cdot 1\cdot(\sqrt{2}-1)\cdot 1}$ বর্গ একক

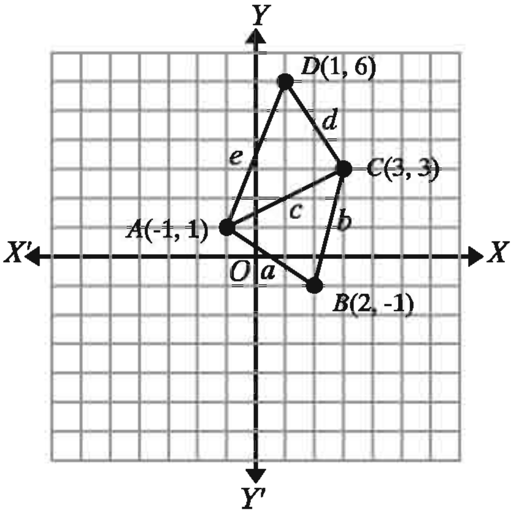
$= \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1}$ বর্গ একক $= \sqrt{2-1}$ বর্গ একক $= 1$ বর্গ একক

$\therefore$ $ABCD$ চতুর্ভুজক্ষেত্র এর ক্ষেত্রফল $= 2 \times 1$ বর্গ একক $= 2$ বর্গ একক।

মন্তব্য: বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে বর্গ করেও ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়। আয়ত এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ গুণ করেও ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়। কিন্তু যেকোনো চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায় না।

উদাহরণ ১০. $A(-1,1)$, $B(2,-1)$, $C(3,3)$ এবং $D(1,6)$ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি অঙ্কন করে এর প্রতিটি বাহু ও একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: বিন্দু পাতনের মাধ্যমে xy সমতলে $ABCD$ চতুর্ভুজটি দেখানো হলো। $ABCD$ চতুর্ভুজটির



বাহু $AB = a = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$ একক
বাহু $BC = b = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$ একক
বাহু $CD = d = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$ একক
বাহু $DA = e = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}$ একক
কর্ণ $AC = c = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20}$ একক

$\triangle ABC$ এ $2s = a+b+c = \left(\sqrt{13}+\sqrt{17}+\sqrt{20}\right)$ একক

$= \left(3.6056+4.1231+4.4721\right)$ একক $= 12.2008$ একক

$\therefore$ $s = 6.1004$ একক

$\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{6.1004 \times 2.4948 \times 1.9773 \times 1.6283}$ বর্গ একক

$= \sqrt{49.000}$ বর্গ একক $= 7$ বর্গ একক

$\triangle ACD$ এ $2s = c+d+e = \left(\sqrt{20}+\sqrt{13}+\sqrt{29}\right)$ একক

$= \left(4.4721+3.6056+5.3852\right)$ একক $= 13.4629$ একক

$\therefore$ $s = 6.7315$ একক।

$\triangle ACD$ এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-c)(s-d)(s-e)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{6.7315 \times 2.2591 \times 3.1256 \times 1.3460}$ বর্গ একক

$= \sqrt{63.9744}$ বর্গ একক $= 7.9983$ বর্গ একক

$\therefore$ $ABCD$ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (7.000 + 7.998)$ বর্গ একক

$= 14.998$ বর্গ একক $= 15$ বর্গ একক (প্রায়)।

মন্তব্য: চতুর্ভুজটি বর্গ বা আয়ত বা সামান্তরিক বা রম্বস কোনোটিই নয়। এ ধরনের বিষম আকারের জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে এ পদ্ধতি অত্যন্ত কার্যকর।

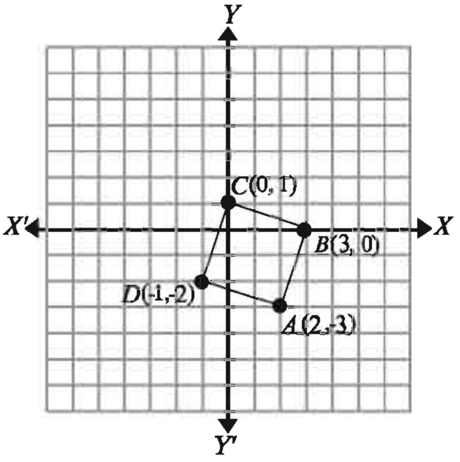
উদাহরণ ১১. চারটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(2,-3)$, $B(3,0)$, $C(0,1)$ এবং $D(-1,-2)$।

ক) দেখাও যে, $ABCD$ একটি রম্বস।

খ) AC ও BD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর এবং $ABCD$ একটি বর্গ কিনা যাচাই কর।

গ) ত্রিভুজক্ষেত্রের মাধ্যমে চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $ABCD$ চতুর্ভুজটি বিন্দু পাতনের মাধ্যমে দেখানো হলো।



ক) ধরি a, b, c, d যথাক্রমে AB, BC, CD এবং DA বাহুর দৈর্ঘ্য এবং কর্ণ $AC = e$ ও কর্ণ $BD = f$।

$a = \sqrt{(3-2)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ একক

$b = \sqrt{(0-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ একক

$c = \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2}$
$= \sqrt{10}$ একক

$d = \sqrt{(2+1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2}$
$= \sqrt{10}$ একক

যেহেতু $a = b = c = d = \sqrt{10}$ একক

$\therefore$ $ABCD$ একটি রম্বস।

খ) কর্ণ $AC = e = \sqrt{(0-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ একক

এবং কর্ণ $BD = f = \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$ একক

$\therefore$ দেখা যাচ্ছে $AC = BD$ অর্থাৎ, কর্ণদ্বয় সমান

$AC^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2 = 20$

$AB^2 + BC^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10 + 10 = 20 = AC^2$

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী $\angle ABC$ সমকোণ।

$\therefore$ $ABCD$ চতুর্ভুজটি একটি বর্গ।

গ) চতুর্ভুজ $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= 2\times$ ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল

এখানে $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রে

$$s = \frac{1}{2}(a+b+e) = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{10}+\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{10}+2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{10}+\sqrt{5}$$

$\therefore$ $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-e)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{10})(\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{10})(\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{20})}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{5})\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{5})}$ বর্গ একক

$= \sqrt{5\cdot((\sqrt{10})^2-(\sqrt{5})^2)} = \sqrt{5\cdot 5} = 5$ বর্গ একক

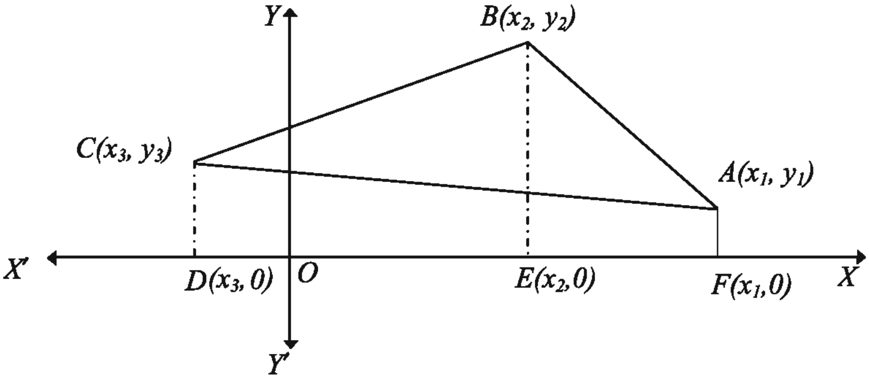
$\therefore$ $ABCD$ বর্গের ক্ষেত্রফল $= 2\times 5$ বর্গ একক $= 10$ বর্গ একক।

মন্তব্য: সহজ পদ্ধতি $ABCD$ বর্গটির ক্ষেত্রফল $= (\sqrt{10})^2 = 10$ বর্গ একক।

পদ্ধতি ২: শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয়

এই পদ্ধতিতে একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের সাহায্যে খুব সহজেই ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়। একইভাবে যেকোনো বহুভুজের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকলেও বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্ভব। বাস্তব ক্ষেত্রে এই পদ্ধতি ব্যবহার করা সম্ভব হয় না। এর কারণ হলো আমরা যদি একটি জমির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে চাই এবং জমিটি যদি ত্রিকোণাকার বা চৌকোণাকার হয় তাহলে এই পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যাবে না। যেহেতু কৌণিক বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক আমাদের জানা নাই বা জানা সম্ভব নয়। কিন্তু জমিটির বাহুর দৈর্ঘ্য আমরা সহজেই মেপে নিতে পারি এবং ১ নং পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারি। তাই উভয় পদ্ধতি সম্পর্কে শিক্ষার্থীদের ধারণা থাকা প্রয়োজন। ২ নং পদ্ধতির সাহায্যে ত্রিভুজ ও বহুভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের কৌশল উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো:

ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র: ধরি, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ ত্রিভুজ ABC এর তিনটি শীর্ষবিন্দু। নিচের চিত্রের অনুরূপ A, B ও C বিন্দু ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে সাজানো।



চিত্র থেকে আমরা পাই,

বহুভুজ $ABCDF$ এর ক্ষেত্রফল $=$ ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $+$ ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ACDF$ এর ক্ষেত্রফল।

$=$ ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ABEF$ এর ক্ষেত্রফল $+$ ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $BCDE$ এর ক্ষেত্রফল।

সুতরাং আমরা পাই,

ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $=$ ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ABEF$ এর ক্ষেত্রফল $+$ ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $BCDE$ এর ক্ষেত্রফল $-$ ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ACDF$ এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore$ ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \times (BE + AF) \times EF + \frac{1}{2} \times (CD + BE) \times DE - \frac{1}{2} \times (CD + AF) \times DF$$

$$= \frac{1}{2} \times (y_2 + y_1) \times (x_1 - x_2) + \frac{1}{2} \times (y_3 + y_2) \times (x_2 - x_3) - \frac{1}{2} \times (y_3 + y_1) \times (x_1 - x_3)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_1 \\ & \nearrow\!\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\!\searrow & & \nearrow\!\!\!\!\!\searrow & \\ y_1 & & y_2 & & y_3 & & y_1 \end{array}\right| \text{ বর্গ একক}$$

যেখানে গুণফলের দিক $\searrow$ ধনাত্মক চিহ্ন হিসেবে নিয়ে পাওয়া গেছে $x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1$ এবং গুণফলের দিক $\nearrow$ ঋণাত্মক চিহ্ন হিসেবে নিয়ে পাওয়া গেছে $-x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3$

সুতরাং, $\triangle ABC$এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

মন্তব্য: মনে রাখা অত্যন্ত গুরুত্বপূর্ণ যে এ পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের ক্ষেত্রে বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$ অবশ্যই ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিতে হবে।

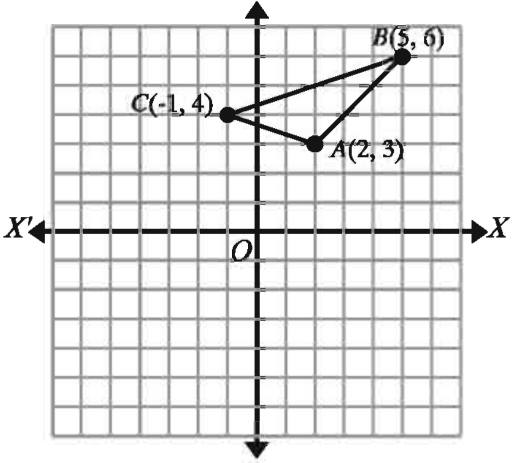
উদাহরণ ১২. $A(2, 3)$, $B(5, 6)$ এবং $C(-1, 4)$ শীর্ষবিশিষ্ট ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $A(2, 3), B(5, 6)$ এবং $C(-1, 4)$ শীর্ষ তিনটিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নেওয়া হলো।

$\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(12 + 20 - 3 - 15 + 6 - 8)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(12)$ বর্গ একক $= 6$ বর্গ একক



উদাহরণ ১৩. একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ $A(1,3)$, $B(5,1)$ এবং $C(3,r)$ এর ক্ষেত্রফল 4 বর্গ একক হলে r এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় কর।

সমাধান: $A(1,3), B(5,1)$ এবং $C(3,r)$ শীর্ষ তিনটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল

$= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & r & 3 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2}(1 + 5r + 9 - 15 - 3 - r)$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2}(4r - 8) = (2r - 4)$ বর্গ একক

প্রশ্নমতে, $|(2r - 4)| = 4$

বা, $\pm(2r - 4) = 4$

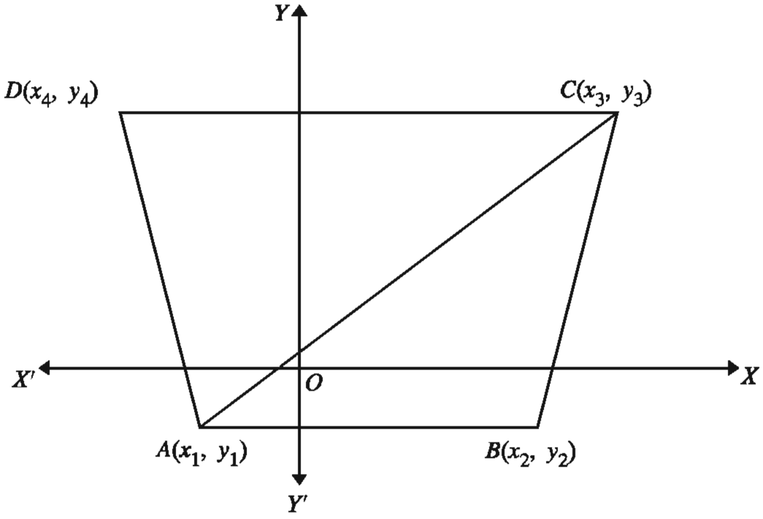
বা, $2r - 4 = \pm 4$

অর্থাৎ, $2r = 0$ বা, 8

$\therefore r = 0,\ 4$

চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

নিচের চিত্রে $ABCD$ একটি চতুর্ভুজ। চতুর্ভুজটির চারটি শীর্ষ যথাক্রমে $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ এবং A, B, C, D কে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিক অনুসারে নেওয়া হয়েছে।



এখন চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $=$ ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $+$ ত্রিভুজক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_2y_1-x_3y_2-x_1y_3)+\frac{1}{2}(x_1y_3+x_3y_4+x_4y_1-x_3y_1-x_4y_3-x_1y_4)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_1y_4)$$

সুতরাং চতুর্ভুজক্ষেত্র এর ক্ষেত্রফল

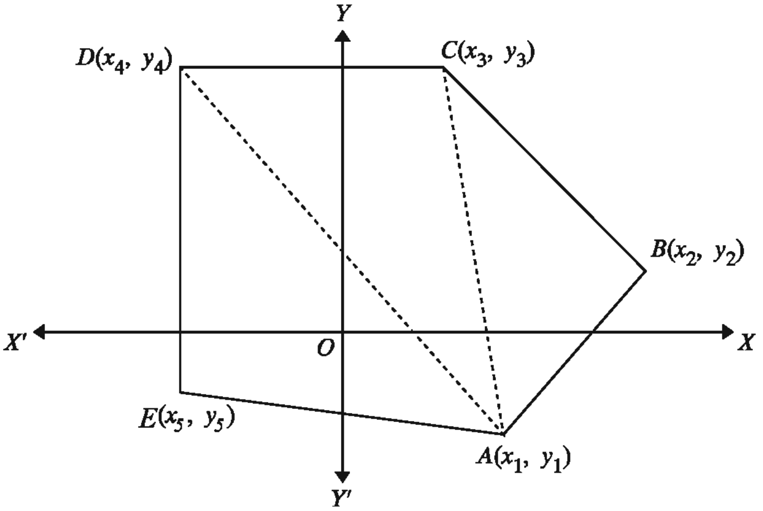
$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক}$$

অনুরূপভাবে একটি পঞ্চভুজ $ABCDE$ (নিচের চিত্র) এর শীর্ষবিন্দুগুলো যদি $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ ও $E(x_5, y_5)$ হয় এবং চিত্রের মত শীর্ষগুলো যদি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে হয়, তবে পঞ্চভুজ $ABCDE$ এর ক্ষেত্রফল তিনটি ত্রিভুজ ক্ষেত্র ABC, ACD ও ADE এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

ত্রিভুজক্ষেত্র ও চতুর্ভুজক্ষেত্রের ঠিক অনুরূপভাবে পঞ্চভুজক্ষেত্র $ABCDE$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_1 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক}$$

একইভাবে যেকোনো বহুভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক জানা থাকলে সহজেই উপরোক্ত পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।



কাজ: চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতির সাহায্যে ষড়ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র প্রতিপাদন কর।

উদাহরণ ১৪. $A(1,4)$, $B(-4,3)$, $C(1,-2)$ এবং $D(4,0)$ শীর্ষবিশিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(3+8+0+16+16-3+8-0)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(48)$ বর্গ একক $= 24$ বর্গ একক

অনুশীলনী ১১.২

১. $A(-2,0)$, $B(5,0)$ এবং $C(1,4)$ যথাক্রমে $\triangle ABC$ এর শীর্ষ বিন্দু।

ক) AB, BC, CA বাহুর দৈর্ঘ্য এবং $\triangle ABC$ এর পরিসীমা নির্ণয় কর।

খ) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২. নিম্নোক্ত প্রতিক্ষেত্রে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর:

ক) $A(2,3)$, $B(5,6)$ এবং $C(-1,4)$ খ) $A(5,2)$, $B(1,6)$ এবং $C(-2,-3)$

৩. দেখাও যে, $A(1,1)$, $B(4,4)$, $C(4,8)$ এবং $D(1,5)$ বিন্দুগুলো একটি সামান্তরিকের শীর্ষ বিন্দু। AC ও BD কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের মাধ্যমে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

৪. $A(-a,0)$, $B(0,-a)$, $C(a,0)$ এবং $D(0,a)$ শীর্ষবিশিষ্ট চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল কত?

৫. দেখাও যে, $A(0,-1)$, $B(-2,3)$, $C(6,7)$ এবং $D(8,3)$ বিন্দুগুলো একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষ। কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৬. তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(-2,1)$, $B(10,6)$ এবং $C(a,-6)$। $AB = BC$ হলে a এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় কর। a এর মানের সাহায্যে যে ত্রিভুজ গঠিত হয় এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৭. A, B, C তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(a, a+1), B(-6,-3)$ এবং $C(5,-1)$। AB এর দৈর্ঘ্য AC এর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ হলে a এর সম্ভাব্য মান এবং ABC ত্রিভুজটির বৈশিষ্ট্য বর্ণনা কর।

৮. নিম্নোক্ত চতুর্ভুজসমূহের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর [পদ্ধতি ২ ব্যবহার কর]:

ক) $(0,0)$, $(-2,4)$, $(6,4)$, $(4,1)$ খ) $(1,4)$, $(-4,3)$, $(1,-2)$, $(4,0)$

গ) $(0,1)$, $(-3,-3)$, $(4,3)$, $(5,1)$

৯. দেখাও যে, $A(2,-3)$, $B(3,-1)$, $C(2,0)$, $D(-1,1)$ এবং $E(-2,-1)$ শীর্ষবিশিষ্ট বহুভুজের ক্ষেত্রফল 11 বর্গ একক।

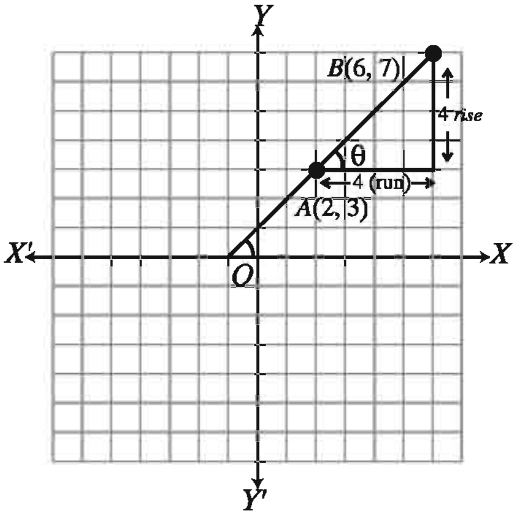
১০. একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ $A(3,4)$, $B(-4,2)$, $C(6,-1)$ এবং $D(p,3)$ এবং শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত। $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হলে p এর মান নির্ণয় কর।

সরলরেখার ঢাল (Gradient or slope of a straight line)

স্থানাঙ্ক জ্যামিতির এই অংশের প্রথমে আমরা সরলরেখার ঢাল বলতে কি বুঝায় এবং সরলরেখার ঢাল নির্ণয়ের কৌশল আলোচনা করবো। ঢালের ধারণা ব্যবহার করে একটি সরলরেখার বীজগাণিতিক রূপ কি হয় তা আলোচনা করা হবে। কোনো সরলরেখা দুইটি বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে সেই সরলরেখার ঢালের প্রকৃতি ও উক্ত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করাই মূলত এই অংশের মূল আলোচনার বিষয়। দুইটি সরলরেখা কোনো বিন্দুতে মিলিত হলে বা ছেদ করলে সেই ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের মাধ্যমে তিনটি সমীকরণ দ্বারা নির্দেশিত রেখার মাধ্যমে গঠিত ত্রিভুজ নিয়েও আলোচনা করা হবে। এখানে আমরা দেখাব বীজগণিতে দুই চলকের একঘাত সমীকরণ সরলরেখা নির্দেশ করে এবং তাদের সমাধান হলো সেই ছেদ বিন্দু।

ঢাল (Gradient or slope)

পাশের চিত্রে AB সরলরেখাটি বিবেচনা করি। রেখাটি $A(2,3)$ ও $B(6,7)$ দুটি বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করেছে। চিত্রানুসারে রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করেছে। এই θ কোণ হলো x অক্ষের সাথে AB সরলরেখাটি কি পরিমাণ আনত হয়েছে তার পরিমাপ। স্থানাঙ্ক জ্যামিতিতে আমরা AB রেখার ঢাল (gradient) m কে নিম্নোক্ত ভাবে পরিমাপ করে থাকি:



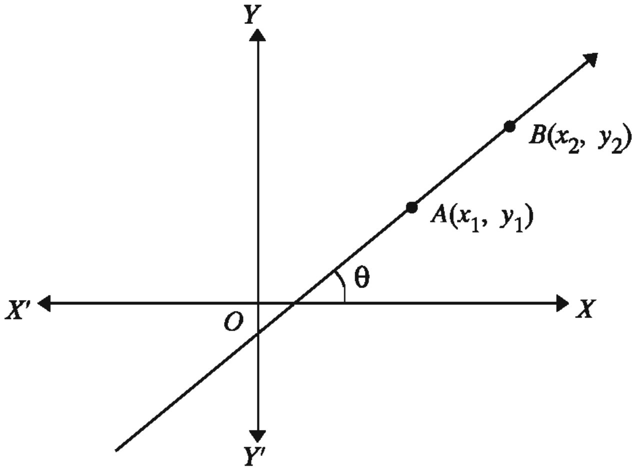
$$m = \frac{y \text{ স্থানাঙ্কের পরিবর্তন}}{x \text{ স্থানাঙ্কের পরিবর্তন}} = \frac{7-3}{6-2} = \frac{4}{4} = 1$$

$\therefore$ AB রেখার ঢাল, $m = 1$

সাধারণত, একটি সরলরেখা যখন $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তখন এর ঢাল (m) কে আমরা

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left[\frac{rise}{run}\right] = \frac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}}$$ দ্বারা প্রকাশ করে থাকি।

বাস্তবিকপক্ষে, কোনো সরলরেখা দ্বারা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ θ এবং ঢাল m এর মধ্যে সম্পর্ক হলো, $m = \tan\theta$। উপরের চিত্রে AB রেখার ক্ষেত্রে সরলরেখার ঢাল $m = 1$ অর্থাৎ, $\tan\theta = 1$ বা, $\theta = 45^\circ$ (একটি সূক্ষ্মকোণ)।



উদাহরণ ১৫. নিম্নের প্রতিক্ষেত্রে নির্দেশিত বিন্দুদ্বয় দ্বারা অতিক্রান্ত সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।

ক) $A(2,3)$ এবং $B(3,6)$

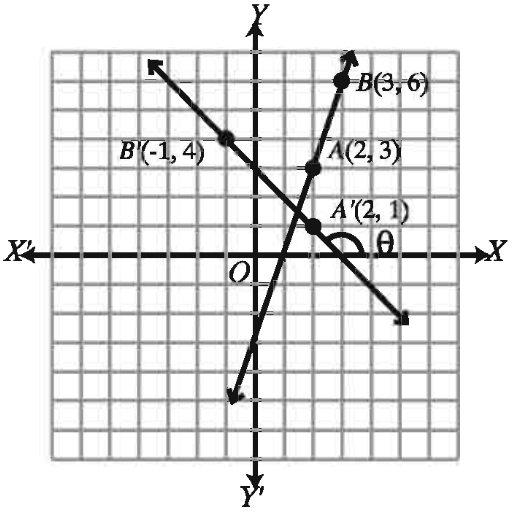
খ) $A'(2,1)$ এবং $B'(-1,4)$

সমাধান:

ক) AB রেখার ঢাল $= \dfrac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}} = \dfrac{6-3}{3-2} = \dfrac{3}{1} = 3$

খ) $A'B'$ রেখার ঢাল $= \dfrac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}} = \dfrac{4-1}{-1-2}$

$= \dfrac{3}{-3} = -1$

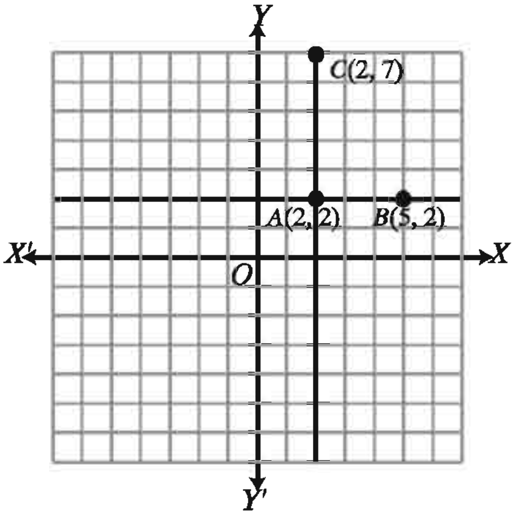


লক্ষণীয়: উপরের চিত্র থেকে দেখা যাচ্ছে, AB রেখার ঢাল ধনাত্মক এবং উৎপন্ন কোণ একটি সূক্ষ্মকোণ। আবার, একই চিত্র থেকে এটি পরিষ্কার যে $A'B'$ রেখার ঢাল ঋণাত্মক এবং উৎপন্ন কোণ একটি স্থূলকোণ। সুতরাং উপরোক্ত আলোচনা থেকে আমরা এই সিদ্ধান্তে আসতে পারি যে, ঢাল ধনাত্মক হলে রেখা দ্বারা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোন সূক্ষ্মকোণ এবং ঢাল ঋণাত্মক হলে রেখা দ্বারা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ একটি স্থূলকোণ।

উৎপন্ন কোণ শূন্য অথবা সমকোণ হলে ঢাল কি হবে তা নিম্নোক্ত উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো:

উদাহরণ ১৬. A, B এবং C তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2,2)$,$(5,2)$ এবং $(2,7)$। কার্তেসীয় তলে AB ও AC রেখা অঙ্কন কর। সম্ভব হলে AB ও AC রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: কার্তেসীয় তলে AB ও AC রেখা অঙ্কন করা হলো।



চিত্র থেকে দেখা যায় যে, AB রেখা x অক্ষের সমান্তরাল এবং AC রেখা y অক্ষের সমান্তরাল।

AB রেখার ঢাল, $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-2}{5-2} = \dfrac{0}{3} = 0$

AC রেখার ঢাল $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ সূত্র দ্বারা নির্ণয় করা যাবে না, কারণ $x_1 = x_2 = 2$ এবং $x_2 - x_1 = 0$। যদি $x_1 = x_2$ হয় তবে রেখার ঢাল নির্ণয় করা যায় না কিন্তু রেখাটি y অক্ষের সমান্তরাল হয়।

সাধারণত কোনো সরলরেখা $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে ঢাল,
$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ বা, $m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ যদি $x_1 \neq x_2$ হয়।

লক্ষ করি: যদি $x_1 = x_2$ হয়, তাহলে রেখাটি y অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ x অক্ষের উপর লম্ব হয়। এই রকম লম্ব রেখা বরাবর বা খাড়া রেখা বরাবর হাঁটা সম্ভব নয়। তাই ঢাল নির্ণয় করাও সম্ভব নয়।

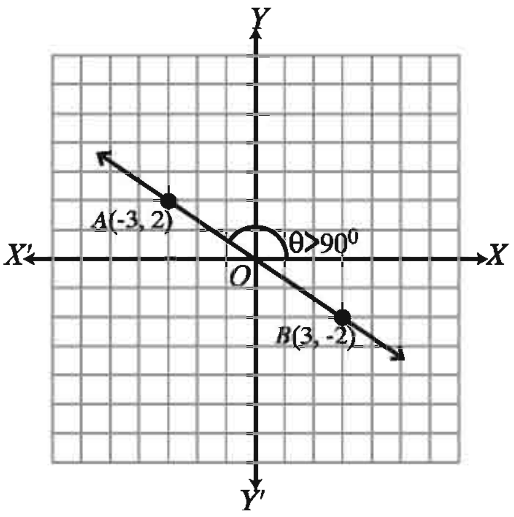
মন্তব্য: উপরের চিত্রে AB রেখার যেকোনো বিন্দুতে কোটি অর্থাৎ $y = 2$ এবং AC রেখার যেকোনো বিন্দুতে ভুজ অর্থাৎ $x = 2$ তাই AB সরলরেখার সমীকরণ $y = 2$ এবং AC সরলরেখার সমীকরণ $x = 2$।

উদাহরণ ১৭. $A(-3, 2)$ এবং $B(3, -2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী রেখার ঢাল নির্ণয় কর।

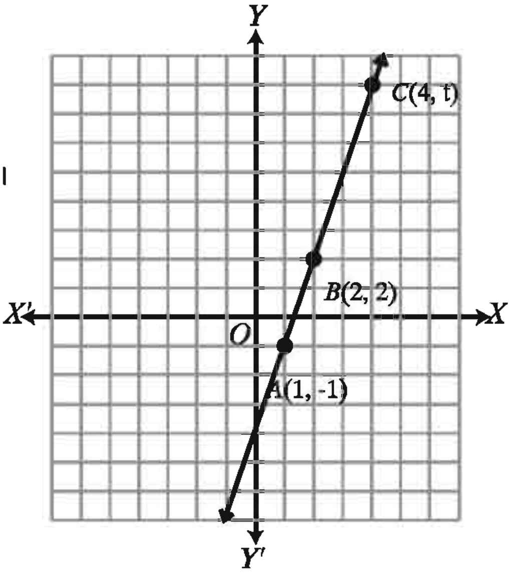
সমাধান: AB রেখার ঢাল m হলে,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}} = \frac{2-(-2)}{-3-3} = \frac{4}{-6}$$
$$= \frac{2}{-3}$$

ঢাল ঋণাত্মক হওয়ায় রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে স্থূলকোণ উৎপন্ন করেছে।



উদাহরণ ১৮. $A(1,-1)$, $B(2,2)$ এবং $C(4,t)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে t এর মান কত?



সমাধান: সমরেখ হওয়ায় AB ও BC রেখার ঢাল একই হবে।
সুতরাং আমরা পাই,

$$\frac{2+1}{2-1}=\frac{t-2}{4-2}$$

বা, $\frac{3}{1}=\frac{t-2}{2}$

বা, $t-2=6$

বা, $t=8$

সুতরাং t এর মান 8।

উদাহরণ ১৯. $A(t,3t)$, $B(t^2,2t)$, $C(t-2,t)$ এবং $D(1,1)$ চারটি ভিন্ন বিন্দু। AB এবং CD রেখা সমান্তরাল হলে t এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার ঢাল $m_1=\frac{2t-3t}{t^2-t}=\frac{-t}{t(t-1)}=\frac{1}{1-t}$

CD রেখার ঢাল $m_2=\frac{1-t}{1-t+2}=\frac{1-t}{3-t}$

যেহেতু AB ও CD রেখা সমান্তরাল, AB ও CD রেখার ঢাল সমান অর্থাৎ, $m_1=m_2$

বা, $\frac{1}{1-t}=\frac{1-t}{3-t}$

বা, $(1-t)^2=(3-t)$

বা, $1-2t+t^2=3-t$

বা, $t^2-t-2=0$

বা, $t=-1$ অথবা $t=2$

সুতরাং t এর সম্ভাব্য মানসমূহ $-1,2$

অনুশীলনী ১১.৩

১. নিম্নের প্রতিটি ক্ষেত্রে A ও B বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।
   - ক) $A(5,-2)$ এবং $B(2,1)$
   - খ) $A(3,5)$ এবং $B(-1,-1)$
   - গ) $A(t,t)$ এবং $B(t^2,t)$
   - ঘ) $A(t,t+1)$ এবং $B(3t,5t+1)$

২. $A(t,1)$, $B(2,4)$ এবং $C(1,t)$ তিনটি ভিন্ন বিন্দু সমরেখ হলে t এর মান নির্ণয় কর।

৩. দেখাও যে, $A(0,-3)$, $B(4,-2)$ এবং $C(16,1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

৪. $A(1,-1)$, $B(t,2)$ এবং $C(t^2,t+3)$ সমরেখ হলে t এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

৫. $A(3,3p)$ এবং $B(4,p^2+1)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল -1 হলে p এর মান নির্ণয় কর।

৬. প্রমাণ কর যে, $A(a,0)$, $B(0,b)$ এবং $C(1,1)$ সমরেখ হবে, যদি $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ হয়।

৭. $A(a,b)$, $B(b,a)$ এবং $C\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$ সমরেখ হলে প্রমাণ কর যে, $a+b=0$।

সরলরেখার সমীকরণ

ধরি, একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা L দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(3,4)$ এবং $B(5,7)$ দিয়ে অতিক্রম করে। নিচের চিত্রে রেখাটি দেখানো হলো।

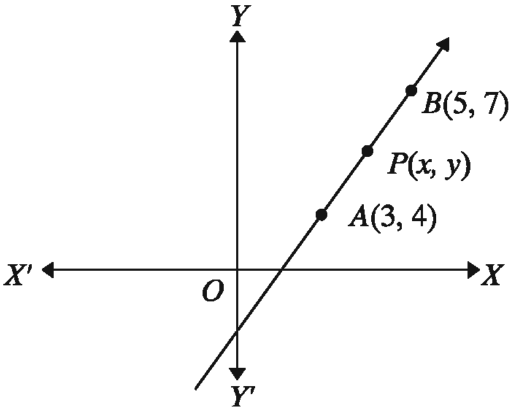
তাহলে AB সরলরেখার ঢাল,

$$m_1=\frac{7-4}{5-3}=\frac{3}{2}\ldots(1)$$

মনে করি, $P(x,y)$ সরলরেখা L এর উপর একটি বিন্দু।

তাহলে AP রেখার ঢাল, $m_2=\frac{y-4}{x-3}\ldots(2)$

কিন্তু AP ও AB একই সরলরেখা হওয়ায় উভয়ের ঢাল সমান। অর্থাৎ,



$$m_1=m_2$$

বা, $\frac{3}{2}=\frac{y-4}{x-3}$ [(1) ও (2) থেকে পাই]

বা, $3x-9=2y-8$

বা, $2y=3x-1$

বা, $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\ldots(3)$

আবার, PB রেখার ঢাল, $m_3=\frac{7-y}{5-x}\ldots(4)$

AB এবং PB রেখার ঢাল সমান বলে,

$$m_1=m_3$$

বা, $\frac{3}{2}=\frac{7-y}{5-x}$ [(1) ও (4) থেকে পাই]

বা, $15 - 3x = 14 - 2y$

বা, $2y + 15 = 3x + 14$

বা, $2y = 3x - 1$

বা, $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \ldots (5)$

সমীকরণ (3) ও (5) একই সমীকরণ। সুতরাং সমীকরণ (3) বা (5) হচ্ছে সরলরেখা L এর কার্তেসীয় সমীকরণ। লক্ষ করলে দেখা যাবে সমীকরণ (3) বা (5) x এবং y এর একঘাত সমীকরণ এবং এটি একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। তাই নিঃসন্দেহে বলা যায় x এবং y এর একঘাত সমীকরণ সব সময় একটি সরলরেখা নির্দেশ করে। সমীকরণ (3) বা (5) কে নিম্নরূপে প্রকাশ করা যায়:

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

$\frac{y-4}{x-3} = \frac{3}{2}$ অথবা $\frac{y-7}{x-5} = \frac{3}{2}$

অর্থাৎ, $\frac{y-4}{x-3} = \frac{7-4}{5-3}$ অথবা $\frac{y-7}{x-5} = \frac{7-4}{5-3}$

অর্থাৎ, $\frac{y-4}{x-3} = m$ অথবা $\frac{y-7}{x-5} = m$

সুতরাং সাধারণভাবে বলা যায়, যদি দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ কোনো সরলরেখার উপর অবস্থিত হয়, তাহলে ঢাল

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \left[\frac{rise}{run}\right] \text{ বা } \left[\frac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}}\right]$$

এবং উক্ত সরলরেখার কার্তেসীয় সমীকরণ হবে

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \ldots (6)$ বা, $\frac{y - y_2}{x - x_2} = m \ldots (7)$

সমীকরণ (6) হতে পাই

$y - y_1 = m(x - x_1) \ldots (8)$

সমীকরণ (7) হতে পাই,

$y - y_2 = m(x - x_2) \ldots (9)$

$\therefore$ (8) এবং (9) হতে আমরা বলতে পারি একটি সরলরেখার ঢাল m হলে এবং রেখাটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) বা (x_2, y_2) দিয়ে অতিক্রম করলে রেখাটির কার্তেসীয় সমীকরণ (8) অথবা (9) দ্বারা নির্ণয় করা যাবে। আবার (6) ও (7) সমীকরণ হতে আমরা পাই,

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} \ldots (10)$$

সমীকরণ (10) হতে স্পষ্টভাবে বলা যায়, একটি সরলরেখা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ দিয়ে অতিক্রম করলে এর কার্তেসীয় সমীকরণ হবে,

$\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ বা $\dfrac{y-y_2}{x-x_2} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \ldots (11)$

যেহেতু, $m = \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

উপরোক্ত আলোচনা নিম্নের উদাহরণসমূহের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো যাতে শিক্ষার্থীরা সরলরেখার ঢাল ও সমীকরণ সহজেই বুঝতে পারে।

উদাহরণ ২০. $A(3,4)$ ও $B(6,7)$ বিন্দুদ্বারা সংযোগকারী রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার ঢাল $m = \dfrac{\text{ওঠা}}{\text{হাঁটা}} = \dfrac{7-4}{6-3} = \dfrac{3}{3} = 1$

সমীকরণ (8) ব্যবহার করে AB রেখার সমীকরণ, $y - 4 = 1(x-3)$

বা, $y - 4 = x - 3$

বা, $y = x + 1$

সমীকরণ (9) ব্যবহার করে AB রেখার সমীকরণ, $y - 7 = 1(x-6)$

বা, $y = x + 1$

সমীকরণ (11) ব্যবহার করে AB রেখার সমীকরণ $\dfrac{y-4}{x-3} = \dfrac{4-7}{3-6}$

বা, $\dfrac{y-4}{x-3} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

বা, $y - 4 = x - 3$

বা, $y = x + 1$

লক্ষণীয় সূত্র (8) বা (9) বা (11) যেকোনোটি ব্যবহার করে দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ নির্ণয় করা যায়। শিক্ষার্থীগণ সুবিধামত যেকোনোটি ব্যবহার করতে পারবে।

উদাহরণ ২১. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ঢাল 3 এবং রেখাটি $(-2,-3)$ বিন্দুগামী। রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, ঢাল $m = 3$ এবং নির্দিষ্ট বিন্দু $(x_1, y_1) = (-2,-3)$

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

বা, $y - (-3) = 3\{x - (-2)\}$

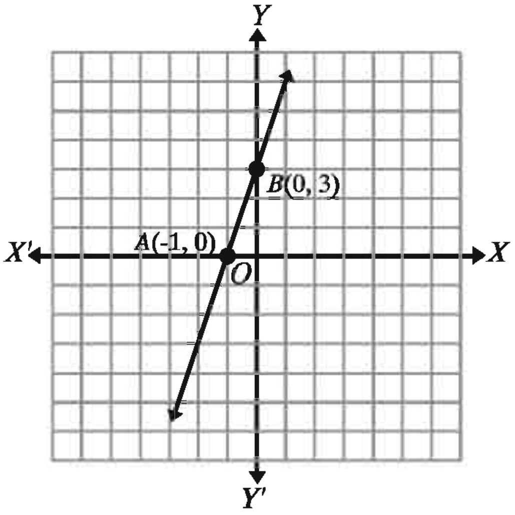
বা, $y + 3 = 3(x+2)$

বা, $y = 3x + 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $y = 3x + 3$

উদাহরণ ২২. সরলরেখা $y = 3x + 3$ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু $P(t, 4)$ দিয়ে অতিক্রম করে। P বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। রেখাটি x এবং y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমাধান: $P(t, 4)$ বিন্দুটি $y = 3x + 3$ রেখার উপর অবস্থিত হওয়ায় বিন্দুর স্থানাঙ্ক রেখার সমীকরণকে সিদ্ধ করবে।



সুতরাং, $4 = 3 \cdot t + 3$
বা, $3t = 4 - 3$
বা, $t = \dfrac{1}{3}$
$\therefore$ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $P(t, 4) = P\left(\dfrac{1}{3}, 4\right)$

$y = 3x + 3$ রেখাটি x অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করে। কাজেই A বিন্দুর কোটি বা y স্থানাঙ্ক 0 [যেহেতু x অক্ষের সকল বিন্দুতে y এর মান শূন্য]
সুতরাং, $0 = 3x + 3$ বা, $x = -1$
$\therefore$ A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-1, 0)$

আবার, $y = 3x + 3$ রেখাটি y অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। কাজেই B বিন্দুর ভুজ বা x স্থানাঙ্ক 0 [যেহেতু y অক্ষের সকল বিন্দুতে x এর মান শূন্য]

সুতরাং, $y = 3 \cdot 0 + 3$ বা, $y = 3$

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 3)$

এখন কার্তেসীয় তলে AB রেখাটি অঙ্কন করি। AB রেখাটি x অক্ষকে $(-1, 0)$ বিন্দুতে এবং y অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করেছে। অর্থাৎ x এর মান যখন -1 তখন $y = 3x + 3$ রেখাটি x অক্ষকে ছেদ করেছে। আবার y এর মান যখন 3 তখন রেখাটি y অক্ষকে ছেদ করেছে। সুতরাং রেখাটির x ছেদক -1 এবং y ছেদক 3।

উল্লম্বিক নয় এমন সরলরেখার সাধারণ সমীকরণকে নিম্নোক্ত রূপে প্রকাশ করা হয়।

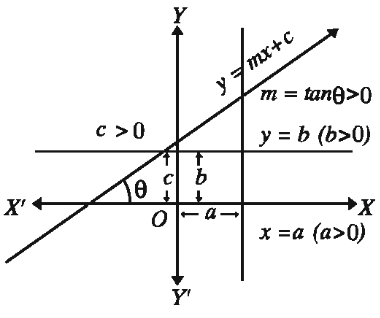
$$\boxed{y = mx + c}$$

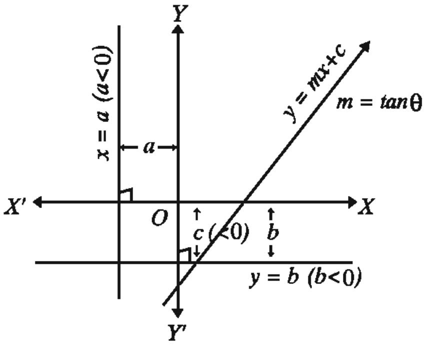
এখানে m রেখাটির ঢাল এবং c হলো y অক্ষের ছেদক এবং $c > 0$ এর জন্য রেখাটি চিত্র (ক) এ দেখানো হলো।

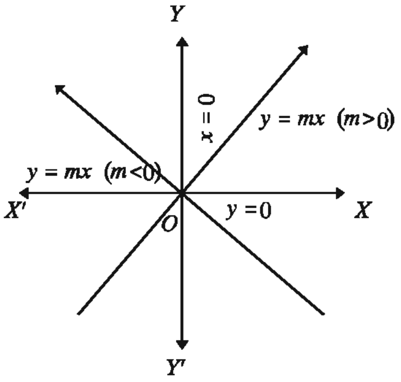
আবার y অক্ষের সমান্তারাল অর্থাৎ, x অক্ষের উপর লম্ব রেখার সাধারণ সমীকরণ হলো $x = a$। একইভাবে x অক্ষের সমান্তরাল অর্থাৎ, y অক্ষের উপর লম্ব রেখার সাধারণ সমীকরণ হলো $y = b$ [চিত্র (ক)]।

লক্ষণীয় c এর মান ধনাত্মক হওয়ায় $y = mx + c$ রেখাটি y অক্ষের ধনাত্মক দিকে c একক দূরে ছেদ করেছে। m এর মান ধনাত্মক $(m = \tan\theta > 0)$ হওয়ায় $y = mx + c$ রেখা দ্বারা উৎপন্ন কোণটি সূক্ষ্মকোণ। a ও b এর মান ধনাত্মক হওয়ায় $x = a$ রেখাটি y অক্ষের ডান দিকে এবং $y = b$ রেখাটি x অক্ষের উপরে দেখানো হয়েছে।

a, b ও c এর ঋণাত্মক মানের বেলায় রেখাগুলোর অবস্থান চিত্র (খ) এ দেখানো হলো।


Y
y = mx+c
m = tanθ>0
c > 0
y = b (b>0)
θ
c
b
X'
X
O
a
x =a (a>0)
Y'
(ক)


Y
x = a (a<0)
a
y = mx+c
m = tanθ
X'
X
O
c (<0)
b
y = b (b<0)
Y'
(খ)


Y
x = 0
y = mx (m>0)
y = mx (m<0)
X'
X
O
y =0
Y'
(গ)

চিত্র (ক) ও (খ) এবং উপরের আলোচনা থেকে আমরা স্পষ্ট করেই বলতে পারি $c = 0$ হলে $y = mx$ রেখাটি মূলবিন্দু $(0, 0)$ দিয়ে যাবে। $a = 0$ হলে রেখাটি y অক্ষ এবং $b = 0$ হলে রেখাটি x অক্ষ [চিত্র (গ)]। সুতরাং x অক্ষের সমীকরণ $y = 0$ এবং y অক্ষের সমীকরণ $x = 0$।

উদাহরণ ২৩. $y - 2x + 3 = 0$ রেখার ঢাল ও ছেদক নির্ণয় কর। কার্তেসীয় তলে রেখাটি এঁকে দেখাও।

সমাধান: $y - 2x + 3 = 0$

বা, $y = 2x - 3$ [$y = mx + c$ আকার]

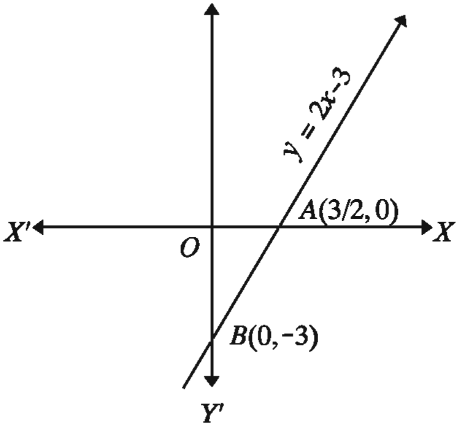
$\therefore$ ঢাল, $m = 2$ এবং y অক্ষের ছেদক, $c = -3$

এখন রেখাটি x ও y অক্ষকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করলে,

A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ [x অক্ষে $y = 0$ বসিয়ে $x = \frac{3}{2}$]

এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -3)$ [y অক্ষে $x = 0$ বসিয়ে $y = -3$]

কার্তেসীয় তলে রেখাটি এঁকে দেখানো হলো।


Y
y = 2x-3
A(3/2,0)
X'
X
O
B(0,-3)
Y'

উদাহরণ ২৪. $A(-1, 3)$ এবং $B(5, 15)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখা x ও y অক্ষকে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। PQ রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর এবং PQ এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান: AB রেখার সমীকরণ, $\dfrac{y-3}{x+1} = \dfrac{3-15}{-1-5}$

$= \dfrac{-12}{-6} = 2$

বা, $y - 3 = 2x + 2$

বা, $y = 2x + 5 \ldots (1)$

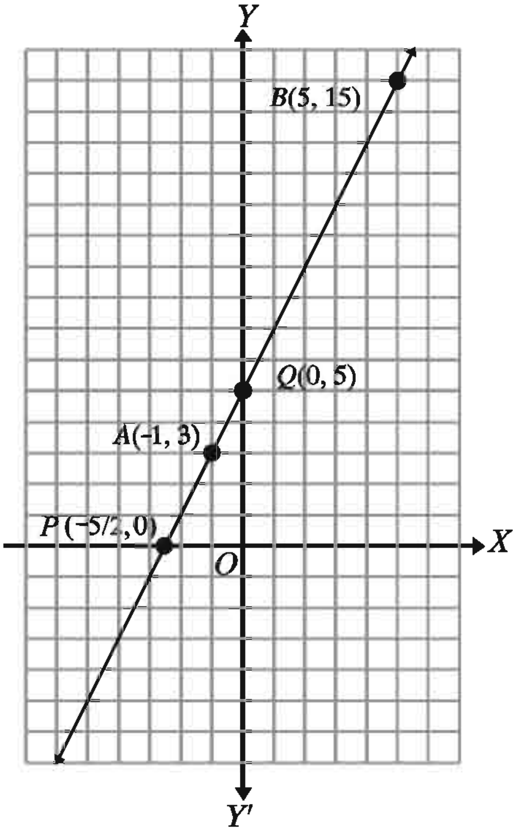
(1) হতে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(-\dfrac{5}{2}, 0\right)$ এবং Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 5)$

$\therefore$ PQ রেখার সমীকরণ, $\dfrac{y-0}{x+\dfrac{5}{2}} = \dfrac{0-5}{\dfrac{-5}{2}-0}$

বা, $\dfrac{2y}{2x+5} = \dfrac{10}{5} = \dfrac{2}{1}$

বা, $2y = 4x + 10$

বা, $y = 2x + 5$



মন্তব্য: AB এবং PQ একই সরলরেখা।

PQ এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\left(-\dfrac{5}{2}-0\right)^2 + (0-5)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{25}{4} + 25} = \sqrt{\dfrac{125}{4}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ একক।

উদাহরণ ২৫. $A(3,4)$, $B(-4,2)$, $C(6,-1)$ এবং $D(k,3)$ বিন্দু চারটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

ক) দেখাও যে, A ও B বিন্দুর সংযোগ সরলরেখা x অক্ষের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে।

খ) $P(x,y)$ বিন্দুটি A ও B থেকে সমদূরবর্তী হলে, দেখাও যে, $14x + 4y = 5$

গ) $ABCD$ চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফলের তিনগুণ হলে k এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) AB রেখার ঢাল m হলে,

$$m = \frac{2-4}{-4-3} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$$

ঢাল ধনাত্মক হওয়ায় রেখাটি x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে সূক্ষ্মকোণ উৎপন্ন করে।

খ) $PA = \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$ এবং $PB = \sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}$

P বিন্দু A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী হওয়ায় $PA = PB$

$\therefore\ \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}$

বা, $x^2-6x+9+y^2-8y+16 = x^2+8x+16+y^2-4y+4$

বা, $-6x-8y-8x+4y = 20-25$

বা, $-14x-4y = -5$

$\therefore\ 14x+4y = 5$

গ) $ABCD$ চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & k & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{2}\{6+4+18+4k-(-16+12-k+9)\} = \dfrac{1}{2}(28+4k-5+k) = \dfrac{1}{2}(23+5k)$

ABC ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

$= \dfrac{1}{2}\{6+4+24-(-16+12-3)\} = \dfrac{41}{2}$

শর্তমতে, $\dfrac{1}{2}(23+5k) = 3 \times \dfrac{41}{2}$

বা, $23+5k = 123$

বা, $5k = 100$ বা, $k = 20$

$\therefore\ k = 20$

অনুশীলনী ১১.৪

১. $A(-1,3)$ এবং $B(2,5)$ হলে AB এর

(i) দৈর্ঘ্য $\sqrt{13}$ একক

(ii) ঢাল $\dfrac{2}{3}$

(iii) সমীকরণ $2x-3y=11$

নিচের কোনটি সঠিক?

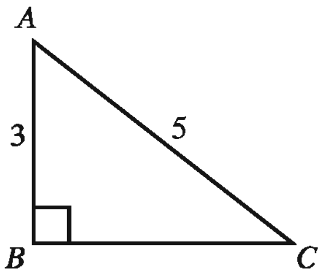
ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii ও iii

২. $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ এ s দ্বারা বুঝায়

ক) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল খ) বৃত্তের ক্ষেত্রফল

গ) ত্রিভুজের অর্ধ পরিসীমা ঘ) বৃত্তের অর্ধ পরিধি

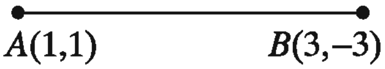
৩.



ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

ক) 12 বর্গ একক খ) 15 বর্গ একক গ) 6 বর্গ একক ঘ) 60 বর্গ একক

৪.



AB রেখার ঢাল

ক) 2 খ) -2 গ) 0 ঘ) 6

৫. $x-2y-10=0$ এবং $2x+y-3=0$ রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয়ের গুণফল

ক) -2 খ) 2 গ) -3 ঘ) -1

৬. $y=\frac{x}{2}+2$ এবং $5x-10y+20=0$ সমীকরণদ্বয়

ক) দুটি ভিন্ন রেখা নির্দেশ করে খ) একই রেখা নির্দেশ করে

গ) রেখাদ্বয় সমান্তরাল ঘ) রেখাদ্বয় পরস্পরচ্ছেদী

৭. $y=x-3$ এবং $y=-x+3$ এর ছেদবিন্দু

ক) $(0,0)$ খ) $(0,3)$ গ) $(3,0)$ ঘ) $(-3,3)$

৮. $x=1,\ y=1$ রেখাদ্বয় যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক

ক) $(0,1)$ খ) $(1,0)$ গ) $(0,0)$ ঘ) $(1,1)$

৯. $x=1,\ y=1$ রেখাদ্বয় অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ক্ষেত্রটি তৈরি করে তার ক্ষেত্রফল

ক) $\frac{1}{2}$ বর্গ একক খ) 1 বর্গ একক

গ) 2 বর্গ একক ঘ) 4 বর্গ একক

১০. একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(2,-1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ঢাল 2।

১১. নিম্নোক্ত বিন্দুসমূহ দ্বারা অতিক্রান্ত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

ক) $A(1,5), B(2,4)$ খ) $A(3,0), B(0,-3)$

গ) $A(a,0), B(2a,3a)$

১২. নিম্নোক্ত প্রতিক্ষেত্রে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

ক) ঢাল 3 এবং y ছেদক 5 খ) ঢাল 3 এবং y ছেদক -5

গ) ঢাল -3 এবং y ছেদক 5 ঘ) ঢাল -3 এবং y ছেদক -5

উপরোক্ত চাররেখা একই সমতলে এঁকে দেখাও [এই রেখাসমূহের মাধ্যমে বুঝা যাবে ঢাল এবং y ছেদকের চিহ্নের জন্য রেখা কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করবে]

১৩. নিম্নোক্ত রেখাসমূহ x অক্ষকে ও y অক্ষকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে নির্ণয় কর। তারপর রেখাসমূহ এঁকে দেখাও।

ক) $y = 3x - 3$ খ) $2y = 5x + 6$

গ) $3x - 2y - 4 = 0$

১৪. $(k,0)$ বিন্দুগামী ও k ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ k এর মাধ্যমে নির্ণয় কর। যদি রেখাটি $(5,6)$ বিন্দুগামী হয় তবে k এর মান নির্ণয় কর।

১৫. $(k^2, 2k)$ বিন্দুগামী এবং $\frac{1}{k}$ ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। যদি রেখাটি $(-2,1)$ বিন্দু দ্বারা অতিক্রম করে তবে k এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

১৬. একটি রেখা $A(-2,3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ঢাল $\frac{1}{2}$। রেখাটি যদি $(3,k)$ বিন্দু দিয়েও যায় তবে k এর মান কত?

১৭. 3 ঢালবিশিষ্ট একটি রেখা $A(-1,6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুগামী অন্য একটি রেখা x অক্ষকে $C(2,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

ক) AB ও AC রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ) $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৮. দেখাও যে, $y - 2x + 4 = 0$ এবং $3y = 6x + 10$ রেখাদ্বয় পরস্পর ছেদ করে না। রেখাদ্বয়ের চিত্র এঁকে ব্যাখ্যা কর কেন সমীকরণ দুইটির সমাধান নাই।

১৯. $y = x + 5$, $y = -x + 5$, এবং $y = 2$ সমীকরণ তিনটি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু নির্দেশ করে। ত্রিভুজটির চিত্র আঁক এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২০. $y = 3x + 4$ এবং $3x + y = 10$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। রেখাদ্বয়ের চিত্র আঁক এবং x অক্ষ সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২১. প্রমাণ কর যে, $2y - x = 2$, $y + x = 7$ এবং $y = 2x - 5$ রেখা তিনটি সমবিন্দু (concurrent) অর্থাৎ একই বিন্দু দ্বারা অতিক্রম করে।

২২. $y = x + 3,\ y = x - 3,\ y = -x + 3$ এবং $y = -x - 3$ একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু নির্দেশ করে। চতুর্ভুজটি আঁক এবং ক্ষেত্রফল তিনটি ভিন্ন পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

২৩. $A(-4, 13)$, $B(8, 8)$, $C(13, -4)$ এবং $D(1, 1)$ একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

ক) BD রেখা x অক্ষের সাথে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর।

খ) $ABCD$ চতুর্ভুজের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

গ) $ABCD$ চতুর্ভুজের যে অংশ x অক্ষের সাথে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২৪. একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ বিন্দু হলো $P(5, 2)$, $Q(-3, 2)$, $R(4, -1)$ এবং $S(-2, -1)$

ক) PS রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

খ) $PQRS$ চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বর্গের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ) $PQRS$ চতুর্ভুজের যে অংশ ২য় চতুর্ভাগে অবস্থান করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

অধ্যায় ১২

সমতলীয় ভেক্টর (Planar Vector)

পদার্থ বিজ্ঞানে আমরা দুই প্রকারের রাশি (quantities) সম্পর্কে জেনেছি। এক প্রকার রাশির বর্ণনায় শুধু পরিমাণ [+(যোগ) বা −(বিয়োগ) চিহ্ন সংযোজন করে পরিমাণ] উল্লেখ করলেই চলে। অন্য প্রকারের রাশির বর্ণনায় পরিমাণ (magnitude) ও দিক (direction) উভয়ই উল্লেখ করতে হয়। প্রথম প্রকারের রাশিকে স্কেলার রাশি ও দ্বিতীয় প্রকারের রাশিকে ভেক্টর রাশি বলা হয়। এই অধ্যায়ে আমরা ভেক্টর রাশি সম্পর্কে আলোচনা করবো।

এই অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা ---

- ▶ স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি বর্ণনা করতে পারবে।
- ▶ স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি প্রতীকের সাহায্যে ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ সমান ভেক্টর, বিপরীত ভেক্টর ও অবস্থান ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ ভেক্টরের যোগ ও যোগবিধি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ ভেক্টরের বিয়োগ ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ ভেক্টরের স্কেলার গুণিতক ও একক ভেক্টর ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ ভেক্টরের স্কেলার গুণিতক ও বণ্টনবিধি ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- ▶ ভেক্টরের সাহায্যে বিভিন্ন জ্যামিতিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি

দৈনন্দিন জীবনে প্রায় সবক্ষেত্রেই বস্তুর পরিমাপের প্রয়োজন হয়। 5 সে.মি., 3 মিনিট, 12 টাকা, 5 লিটার, 6° C ইত্যাদি দ্বারা যথাক্রমে বস্তুর দৈর্ঘ্য, সময়ের পরিমাণ, টাকার পরিমাণ, আয়তনের পরিমাণ ও তাপমাত্রার পরিমাণ বুঝানো হয়। এসব পরিমাপের জন্য কেবলমাত্র এককসহ পরিমাণ উল্লেখ করলেই চলে। আবার যদি বলা হয় একটি লোক একবিন্দু থেকে যাত্রা করে প্রথমে 4 মি. পরে 5 মি. গেল, তাহলে যাত্রাবিন্দু থেকে তার দূরত্ব নির্ণয় করতে গেলে প্রথমে জানা দরকার লোকটির গতির দিক কী? গতির সঠিক দিক না জানা পর্যন্ত যাত্রাবিন্দু থেকে লোকটি কতদূর গিয়েছে তা সঠিকভাবে নির্ণয় সম্ভব নয়।

যে রাশি কেবলমাত্র এককসহ পরিমাণ দ্বারা অথবা পরিমাণের পূর্বে + বা − চিহ্নযুক্ত করে সম্পূর্ণরূপে বুঝানো যায়, তাকে **স্কেলার বা অদিক বা নির্দিক রাশি** (scalar quantity) বলা হয়। দৈর্ঘ্য (length), ভর (mass), আয়তন (volume), দ্রুতি (speed), তাপমাত্রা (temperature) ইত্যাদি প্রত্যেকেই স্কেলার রাশি।

যে রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য তার পরিমাণ ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয়, তাকে **ভেক্টর বা সদিক রাশি** (vector quantity) বলা হয়। সরণ (displacement), বেগ (velocity), ত্বরণ (acceleration), ওজন (weight), বল (force) ইত্যাদি প্রত্যেকেই ভেক্টর রাশি।

ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক প্রতিরূপ: দিক নির্দেশক রেখাংশ

কোনো রেখাংশের এক প্রান্তকে **আদিবিন্দু** (initial point) এবং অপর প্রান্তকে **অন্তবিন্দু** (terminal point) হিসেবে চিহ্নিত করলে ঐ রেখাংশকে একটি **দিক নির্দেশক রেখাংশ বা সদিক রেখাংশ** (directed line segment) বলা হয়। কোনো দিক নির্দেশক রেখাংশের আদি বিন্দু A এবং অন্তবিন্দু B হলে ঐ দিক নির্দেশক রেখাংশকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। প্রত্যেক দিক নির্দেশক রেখাংশ একটি ভেক্টর রাশি, যার পরিমাণ ঐ রেখাংশের দৈর্ঘ্য ($|\overrightarrow{AB}|$) বা সংক্ষেপে AB দ্বারা সূচিত এবং যার দিক A বিন্দু হতে AB রেখা বরাবর B বিন্দু নির্দেশকারী দিক।

বিপরীতক্রমে যেকোনো ভেক্টর রাশিকে একটি দিক নির্দেশক রেখাংশ দ্বারা প্রকাশ করা যায়, যেখানে রেখাংশটির দৈর্ঘ্য রাশিটির পরিমাণ এবং রেখাংশটির আদিবিন্দু হতে অন্তবিন্দু নির্দেশকারী দিক প্রদত্ত ভেক্টর রাশির দিক। তাই, ভেক্টর রাশি ও দিক নির্দেশক রেখাংশ সমার্থক ধারণা। দিক নির্দেশক রেখাংশকে **জ্যামিতিক ভেক্টর** বলেও উল্লেখ করা হয়। আমাদের আলোচনা একই সমতলে অবস্থিত ভেক্টরের মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকবে। আমরা এখানে ভেক্টর বলতে জ্যামিতিক ভেক্টরই বুঝবো। এই প্রসঙ্গে স্কেলার রাশির নির্দেশক বাস্তব সংখ্যাকে স্কেলার বলবো।

কোনো ভেক্টর (দিক নির্দেশক রেখাংশ) যে অসীম সরলরেখার অংশ বিশেষ, তাকে ঐ ভেক্টরের **ধারক রেখা** বা শুধু **ধারক** (support) বলা হয়।

সচরাচর একটি ভেক্টরকে একটি অক্ষর দিয়ে সূচিত করা হয়; যেমন $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ ভেক্টর বুঝাতে ভেক্টরটির নিচে দাগ (underscore) দেওয়া হয় এবং এর নির্দেশকারী সদিক রেখাংশের উপরে $\rightarrow$ চিহ্ন দেওয়া হয়। $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ এর অর্থ $\underline{u}$ ভেক্টরের আদি বিন্দু A ও প্রান্তবিন্দু B এবং এর দিক A এর দিক হতে B এর দিকে এবং এর দৈর্ঘ্য $|\underline{u}| = |\overrightarrow{AB}|$, AB রেখাংশের দৈর্ঘ্য।

কাজ:

ক) তোমার বাড়ি হতে স্কুল সোজা দক্ষিণে 3 কি.মি. দূরে অবস্থিত। বাড়ি হতে হেঁটে স্কুলে যেতে এক ঘণ্টা সময় লাগলে তোমার গতিবেগ কত?

খ) স্কুল ছুটির পর সাইকেলে 20 মিনিটে বাড়ি এলে এক্ষেত্রে তোমার গতিবেগ কত?

ভেক্টরের সমতা ও বিপরীত ভেক্টর

সমান ভেক্টর: একটি ভেক্টর $\underline{u}$ কে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ এর সমান বলা হয় যদি

ক) $|\underline{u}| = |\underline{v}|$ ($\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য $\underline{v}$ এর দৈর্ঘ্যের সমান)

খ) $\underline{u}$ এর ধারক, $\underline{v}$ এর ধারকের সঙ্গে অভিন্ন অথবা সমান্তরাল হয়

গ) $\underline{u}$ এর দিক $\underline{v}$ এর দিকের সঙ্গে একই মুখী হয়।

$$A \xrightarrow{\underline{u}} B \qquad C \xrightarrow{\underline{v}} D \qquad \begin{array}{c} C \xrightarrow{\underline{v}} D \\ A \xrightarrow{\underline{u}} B \end{array}$$

সমতার এই সংজ্ঞা যে নিচের নিয়মগুলো মেনে চলে, তা সহজেই বুঝা যায়:

ক) $\underline{u} = \underline{u}$

খ) $\underline{u} = \underline{v}$ হলে $\underline{v} = \underline{u}$

গ) $\underline{u} = \underline{v}$ এবং $\underline{v} = \underline{w}$ হলে $\underline{u} = \underline{w}$

$\underline{u}$ এর ধারক এবং $\underline{v}$ এর ধারক রেখাদ্বয় অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে, আমরা সংক্ষেপে বলব $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ সমান্তরাল ভেক্টর।

দ্রষ্টব্য: যেকোনো বিন্দু থেকে প্রদত্ত যেকোনো ভেক্টরের সমান করে একটি ভেক্টর টানা যায়। কেননা, বিন্দু P এবং ভেক্টর $\underline{u}$ দেওয়া থাকলে, আমরা P বিন্দু দিয়ে $\underline{u}$ এর ধারকের সমান্তরাল করে একটি সরলরেখা টানি, তারপর P বিন্দু থেকে $\underline{u}$ এর দিক বরাবর $|\underline{u}|$ এর সমান করে PQ রেখাংশ কেটে নিই। তাহলে অঙ্কন অনুযায়ী $\overrightarrow{PQ} = \underline{u}$ হয়।

বিপরীত ভেক্টর: $\underline{v}$ কে $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর বলা হয়, যদি

ক) $|\underline{v}| = |\underline{u}|$

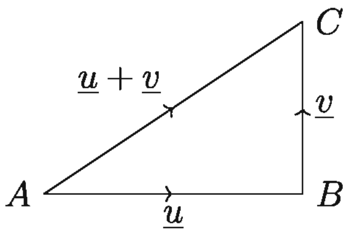
খ) $\underline{v}$ এর ধারক, $\underline{u}$ এর ধারকের সঙ্গে অভিন্ন বা সমান্তরাল হয়

গ) $\underline{v}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত হয়।

$\underline{v}$ যদি $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর হয়, তবে $\underline{u}$ হবে $\underline{v}$ এর বিপরীত ভেক্টর। সমতার সংজ্ঞা থেকে বুঝা যায় যে, $\underline{v}$ এবং $\underline{w}$ প্রত্যেকে $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর হলে $\underline{v} = \underline{w}$ হয়। $\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর বুঝাতে $-\underline{u}$ লেখা হয়। $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ হলে $-\underline{u} = \overrightarrow{BA}$।

ভেক্টরের যোগ

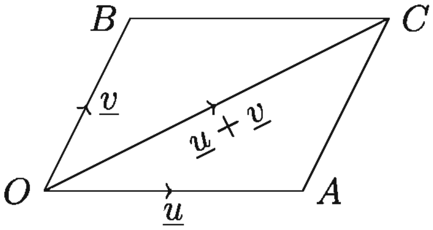
কোনো $\underline{u}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দু থেকে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ আঁকা হলে $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা এরূপ ভেক্টর বুঝায় যার আদিবিন্দু $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং যার প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু। মনে করি $\overrightarrow{AB} = \underline{u}, \overrightarrow{BC} = \underline{v}$ এরূপ দুইটি ভেক্টর যে, $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু $\underline{v}$ এর আদিবন্দু। তাহলে $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু এবং $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু সংযোজক $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরকে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমষ্টি বলা হয় এবং $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা সূচিত হয়।



ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি: উপরের চিত্রে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল না হলে $\underline{u}, \underline{v}$ এবং $\underline{u}+\underline{v}$ ভেক্টরত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় বলে উপরোক্ত যোজন পদ্ধতিকে ত্রিভুজ বিধি বলা হয়।

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধির অনুসিদ্ধান্ত হিসেবে ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি নিম্নরূপ:

ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি: কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ঐ সামান্তরিকের যে কর্ণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখার ছেদবিন্দুগামী তা দ্বারা $\underline{u}+\underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত হয়। নিচে আমরা এটার প্রমাণ দেখবো।



প্রমাণ: মনে করি, যেকোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয় $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OB}$ দ্বারা সূচিত হয়েছে। $OACB$ সামান্তরিক ও তার OC কর্ণ অঙ্কন করি। তাহলে ঐ সামান্তরিকের $\overrightarrow{OC}$ কর্ণ দ্বারা $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর যোগফল সূচিত হবে। অর্থাৎ $\overrightarrow{OC}=\underline{u}+\underline{v}$।

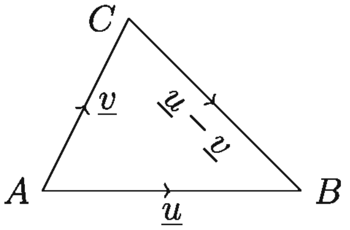
$OACB$ সামান্তরিকের OB ও AC সমান ও সমান্তরাল। $\therefore \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\underline{v}$ [ভেক্টর স্থানান্তর]

$\therefore$ ত্রিভুজ বিধি কাজে লাগিয়ে $\underline{u}+\underline{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$ [প্রমাণিত]

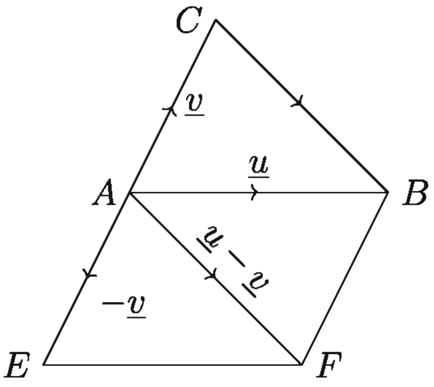
দ্রষ্টব্য: ক) দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে তাদের **লব্ধিও** বলা হয়। বল বা বেগের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ভেক্টর যোগের পদ্ধতি অনুসরণ করতে হয়। খ) দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয়, কিন্তু ত্রিভুজ বিধি সকল ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

ভেক্টরের বিয়োগ

$\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল $\underline{u}-\underline{v}$ বলতে $\underline{u}$ এবং $-\underline{v}$ (অর্থাৎ $\underline{v}$ এর বিপরীত ভেক্টর) ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল $\underline{u}+(-\underline{v})$ বুঝায়।


C
$\underline{v}$
$\underline{u}-\underline{v}$
A
B
$\underline{u}$

ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি: $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর আদিবিন্দু একই হলে $\underline{u}-\underline{v}$ সেই ভেক্টর, যার আদিবিন্দু হচ্ছে $\underline{v}$ এর অন্তবিন্দু এবং যার অন্তবিন্দু হচ্ছে $\underline{u}$ এর অন্তবিন্দু। সংক্ষেপে একই আদিবিন্দু বিশিষ্ট দুইটি ভেক্টরের বিয়োগফল হচ্ছে অন্তবিন্দুদ্বয় দ্বারা বিপরীতক্রমে গঠিত ভেক্টর। সুতরাং $\underline{u}=\overrightarrow{AB}$, $\underline{v}=\overrightarrow{AC}$ হলে $\underline{u}-\underline{v}=\overrightarrow{CB}$, অর্থাৎ, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$। নিচে আমরা এটা প্রমাণ করবো।


C
$\underline{v}$
$\underline{u}$
A
B
$\underline{u}-\underline{v}$
$-\underline{v}$
E
F

প্রমাণ: CA রেখাংশকে এমনভাবে বর্ধিত করি যেন $AE=CA$ হয়। $AEFB$ সামান্তরিক গঠন করি। ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি অনুযায়ী, $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF}$।

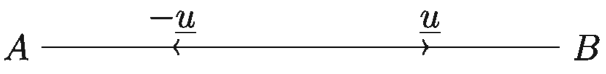
আবার $AFBC$ একটি সামান্তরিক, কেননা $BF=AE=CA$ এবং $BF \parallel AE$ বলে $BF \parallel CA$।

$\therefore \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CB}$ (ভেক্টর স্থানান্তর), কিন্তু $\overrightarrow{AE}=-\underline{v}$ এবং $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$।

সুতরাং $\underline{u}-\underline{v}=\overrightarrow{CB}$ প্রমাণিত হলো।

শূন্য ভেক্টর

যে ভেক্টরের মান শূন্য এবং যার দিক নির্ণয় করা যায় না তাকে শূন্য ভেক্টর বলে।


A
$-\underline{u}$
$\underline{u}$
B

$\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর হলে $\underline{u}+(-\underline{u})$ কি হবে?

ধরি, $\underline{u}=\overrightarrow{AB}$ তখন $-\underline{u}=\overrightarrow{BA}$,

ফলে $\underline{u}-\underline{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী]

কিন্তু $\overrightarrow{AA}$ কি ধরনের ভেক্টর? এটি একটি বিন্দু ভেক্টর, অর্থাৎ এর আদিবিন্দু ও অন্তবিন্দু একই বিন্দু; সুতরাং দৈর্ঘ্য শূন্য। অর্থাৎ $\overrightarrow{AA}$ দ্বারা A বিন্দুকেই বুঝতে হবে। দৈর্ঘ্য শূন্য এরূপ ভেক্টরকে শূন্য ভেক্টর

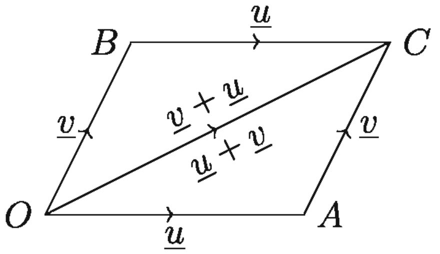
বলা হয় এবং $\underline{0}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। এটি একমাত্র ভেক্টর যার কোনো নির্দিষ্ট দিক বা ধারক রেখা নেই।

শূন্য ভেক্টরের অবতারণার ফলে আমরা বলতে পারি যে, $\underline{u} + (-\underline{u}) = \underline{0}$ এবং $\underline{u} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{u} = \underline{u}$ বস্তুত শূন্য ভেক্টরের সঙ্গে শেষোক্ত অভেদ নিহিত রয়েছে।

ভেক্টর যোগের বিধিসমূহ

পাটিগণিতের যোগের মতোই ভেক্টরের যোগে বিনিময়, সংযোগ, ও বর্জন বিধি ব্যবহার করা যায়।

ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি (Commutative law): যেকোনো $\underline{u}$, $\underline{v}$ ভেক্টরের জন্য $\underline{u}+\underline{v} = \underline{v}+\underline{u}$।



প্রমাণ: মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{v}$। $OACB$ সামান্তরিক ও তার কর্ণ OC অঙ্কন করি। OA ও BC সমান ও সমান্তরাল এবং OB ও AC সমান ও সমান্তরাল।

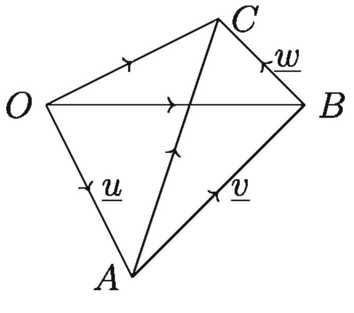
$\therefore \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}$। আবার, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \underline{v} + \underline{u}$।

$\therefore \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$। সুতরাং ভেক্টর যোগ বিনিময় বিধি সিদ্ধ করে।

ভেক্টর যোগের সংযোগ বিধি (Associative law): যেকোনো $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ভেক্টরের জন্য

$$(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$$

প্রমাণ: মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}, \overrightarrow{AB} = \underline{v}, \overrightarrow{BC} = \underline{w}$, অর্থাৎ $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু থেকে $\underline{v}$ এবং $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু থেকে $\underline{w}$ অঙ্কন করা হয়েছে। O, C; O, B এবং A, C যোগ করি।



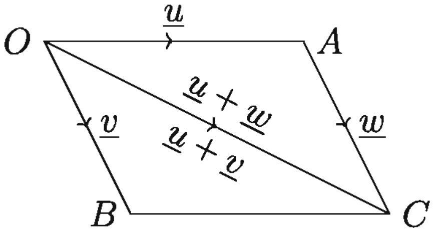
তাহলে $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$

আবার, $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$

$\therefore (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$। সুতরাং ভেক্টর যোগ সংযোগ বিধি সিদ্ধ করে।

অনুসিদ্ধান্ত ১. কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর একই ক্রম দ্বারা সূচিত ভেক্টরত্রয়ের যোগফল শূন্য ভেক্টর। উপরের চিত্রে, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AO}=\underline{0}$।

ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি (Cancellation law): যেকোনো $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ভেক্টরের জন্য $\underline{u}+\underline{v}=\underline{u}+\underline{w}$ হলে $\underline{v}=\underline{w}$ হবে।



প্রমাণ: যেহেতু $\underline{u}+\underline{v}=\underline{u}+\underline{w}$

$\therefore \underline{u}+\underline{v}+(-\underline{u})=\underline{u}+\underline{w}+(-\underline{u})$ [উভয়পক্ষে $-\underline{u}$ যোগ করে]

বা, $\underline{u}-\underline{u}+\underline{v}=\underline{u}-\underline{u}+\underline{w}$ অর্থাৎ $\underline{v}=\underline{w}$

ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক (Scalar multiple of a vector)

$\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে $m\underline{u}$ দ্বারা কোন ভেক্টর বুঝায়, নিচে তা ব্যাখ্যা করা হলো।

১. $m=0$ হলে, $m\underline{u}=\underline{0}$ বা শূন্য ভেক্টর

২. $m\neq 0$ হলে, $m\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য $\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্যের $|m|$ গুণ হবে, $m\underline{u}$ এর ধারক $\underline{u}$ এর ধারকের সাথে অভিন্ন হবে, এবং

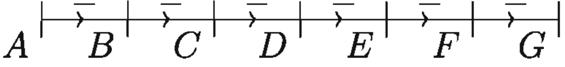
   ক) $m>0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের সংগে একমুখী হবে

   খ) $m<0$ হলে, $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত হবে।

দ্রষ্টব্য: ক) $m=0$ অথবা $\underline{u}=\underline{0}$ হলে $m\underline{u}=\underline{0}$ খ) $1\underline{u}=\underline{u}, (-1)\underline{u}=-\underline{u}$

উপরোক্ত সংজ্ঞা হতে দেখা যায়, $m(n\underline{u})=n(m\underline{u})=(mn)(\underline{u})$

m, n উভয়ে >0, উভয়ে <0, একটি >0 এবং অপরটি <0, একটি বা উভয় 0, এ সকল ক্ষেত্রেও পৃথক পৃথকভাবে বিবেচনা করে সহজেই সূত্রটির বাস্তবতা সম্পর্কে নিশ্চিত হওয়া যায়। নিচে এর একটি উদাহরণ দেয়া হলো:



মনে করি, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}=\underline{u}$

AC কে G পর্যন্ত এরূপে বর্ধিত করি যেন $CD=DE=EF=FG=AB$ হয়।

তখন $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}=\underline{u}+\underline{u}+\underline{u}+\underline{u}+\underline{u}+\underline{u}=6\underline{u}$

অন্যদিকে $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EG} = 2\underline{u} + 2\underline{u} + 2\underline{u} = 3(2\underline{u})$

এবং $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DG} = 3\underline{u} + 3\underline{u} = 2(3\underline{u})$

$\therefore 2(3\underline{u}) = 3(2\underline{u}) = 2 \times 3(\underline{u})$

দ্রষ্টব্য: দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে, এদের একটিকে অপরটির সংখ্যা গুণিতক আকারে প্রকাশ করা যায়।

বাস্তবে $AB \parallel CD$ হলে, $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{CD}$ যেখানে, $|m| = \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CD}|} = \dfrac{AB}{CD}$

ক) $m > 0$ হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমমুখী হয়,

খ) $m < 0$ হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীতমুখী হয়।

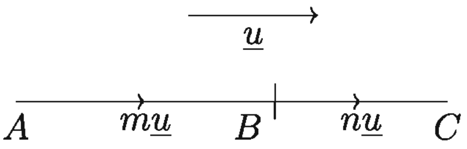
ভেক্টরের সাংখ্যগুণিতক সংক্রান্ত বণ্টন সূত্র

m, n দুইটি স্কেলার এবং $\underline{u}$, $\underline{v}$ দুইটি ভেক্টর হলে,

১. $(m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

২. $m(\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$

সূত্র ১. $(m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$



প্রমাণ: m বা n শূন্য হলে সূত্রটি অবশ্যই খাটে।

মনে করি, m, n উভয়ে ধনাত্মক এবং $\overrightarrow{AB} = m\underline{u}$ $\quad \therefore |\overrightarrow{AB}| = m|\underline{u}|$

AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $|\overrightarrow{BC}| = n|\underline{u}|$ হয় $\quad \therefore \overrightarrow{BC} = n\underline{u}$

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = m|\underline{u}| + n|\underline{u}| = (m+n)|\underline{u}| \quad \therefore \overrightarrow{AC} = (m+n)\underline{u}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \quad \therefore m\underline{u} + n\underline{u} = (m+n)\underline{u}$

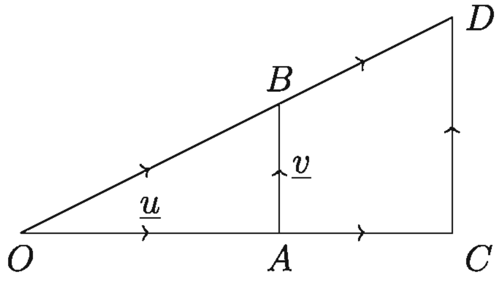
m, n উভয়ে ঋণাত্মক হলে $(m+n)\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $|(m+n)||\underline{u}|$ এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত দিক। তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য হবে $|m||\underline{u}| + |n||\underline{u}| = (|m| + |n|)|\underline{u}|$ এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক। কিন্তু $m < 0$ এবং $n < 0$ হলে $|m| + |n| = |m+n|$ হয়, সেহেতু এক্ষেত্রে $(m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ পাওয়া গেল।

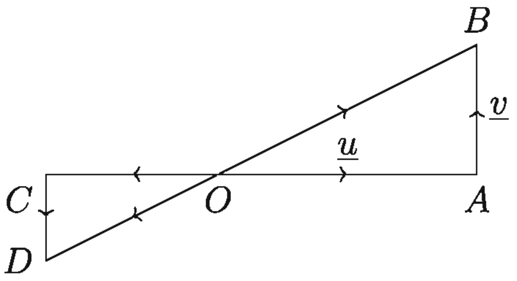
সর্বশেষ m এবং n এর মধ্যে একটি > 0 এবং অপরটি < 0 হলে $(m+n)\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $|(|m| - |n|)|\underline{u}|$ এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর দিকের সাথে একমুখী যখন $|m| > |n|$ এবং $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক যখন $|m| < |n|$। তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটিও দৈর্ঘ্যে ও দিকে $(m+n)\underline{u}$ এর সাথে একমুখী হবে।

দ্রষ্টব্য: তিনটি বিন্দু A, B, C সমরেখ হবে যদি এবং কেবল যদি $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ এর সাংখ্য গুণিতক হয়।

মন্তব্য: ক) দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন অথবা সমান্তরাল হলে এবং তাদের দিক একই হলে, তাদের সদৃশ (similar) ভেক্টর বলা হয়। খ) যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য 1 একক, তাকে (দিক নির্দেশক) একক ভেক্টর বলে।

সূত্র ২. $m(\underline{u}+\underline{v}) = m\underline{u}+m\underline{v}$





প্রমাণ: মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{u}, \overrightarrow{AB} = \underline{v}$। তাহলে $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} = \underline{u}+\underline{v}$

OA কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $OC = m \cdot OA$ হয়। উপরের বামের চিত্রে m ধনাত্মক ও ডানের চিত্রে m ঋণাত্মক। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত AB এর সমান্তরাল CD রেখা OB এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু OAB এবং OCD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

সেহেতু $\dfrac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \dfrac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OB}|} = m$

$\therefore OC = m \cdot OA, CD = m \cdot AB, OD = m \cdot OB$

$\therefore \overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{AB} = m\underline{v}$

এখানে, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$

বা, $m(\overrightarrow{OA})+m(\overrightarrow{AB}) = m(\overrightarrow{OB})$

$\therefore m\underline{u}+m\underline{v} = m(\underline{u}+\underline{v})$

দ্রষ্টব্য: m এর সকল মানের জন্য উপরোক্ত সূত্র সত্য।

ব্যবহারের সুবিধার্থে ভেক্টর সম্পর্কিত নিয়মগুলো নিচে একত্রে লেখা হলো:

১. $\underline{u}+\underline{v} = \underline{v}+\underline{u}$

২. $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w} = \underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$

৩. $\underline{u}+\underline{0} = \underline{0}+\underline{u} = \underline{u}$

৪. $\underline{u}+(-\underline{u}) = (-\underline{u})+\underline{u} = \underline{0}$

৫. $\underline{u}+\underline{v} = \underline{u}+\underline{w}$ হলে $\underline{v} = \underline{w}$

৬. $m(n\underline{u}) = n(m\underline{u}) = (mn)(\underline{u})$

৭. $0\underline{u} = \underline{0}$

৮. $1\underline{u} = \underline{u}$

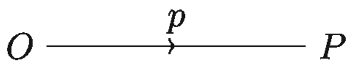
৯. $(-1)\underline{u} = -\underline{u}$

১০. $(m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$

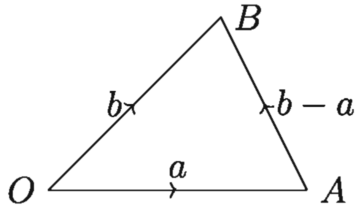
কাজ: m ও n এর বিভিন্ন প্রকার সাংখ্যিক মান নিয়ে $\underline{u}$ ভেক্টরের জন্য $(m+n)\underline{u} = m\underline{u}+n\underline{u}$ সূত্রটি যাচাই কর।

অবস্থান ভেক্টর

সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো P বিন্দুর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দু সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয় এবং O বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু (origin) বলা হয়।



মনে করি, কোনো সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একই সমতলে A অপর একটি বিন্দু। O, A যোগ করলে উৎপন্ন $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টর O বিন্দুর পরিপ্রেক্ষিতে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। অনুরূপভাবে, একই O বিন্দুর প্রেক্ষিতে একই সমতলে অপর B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB}$।



A, B যোগ করি। মনে করি, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}, \overrightarrow{OB} = \underline{b}$

তাহলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ অর্থাৎ $\underline{a} + \overrightarrow{AB} = \underline{b}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

সুতরাং, দুইটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর জানা থাকলে তাদের সংযোজক রেখাংশ দ্বারা সূচিত ভেক্টর ঐ ভেক্টরদ্বয়ের প্রান্তবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বিয়োগ করে পাওয়া যাবে।

দ্রষ্টব্য: মূলবিন্দু ভিন্ন ভিন্ন অবস্থানে থাকলে একই বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ভিন্ন ভিন্ন হতে পারে। কোনো নির্দিষ্ট প্রতিপাদ্য বিষয়ের সমাধানে এ বিষয়ের বিবেচনাধীন সকল বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর একই মূলবিন্দুর সাপেক্ষে ধরা হয়।

কাজ: তোমার খাতায় একটি বিন্দুকে মূলবিন্দু O ধরে বিভিন্ন অবস্থানে আরও পাঁচটি বিন্দু নিয়ে O বিন্দুর সাপেক্ষে এগুলোর অবস্থান ভেক্টর চিহ্নিত কর।

কতিপয় উদাহরণ

উদাহরণ ১. দেখাও যে,

ক) $-(-\underline{a}) = \underline{a}$

খ) $-m(\underline{a}) = m(-\underline{a}) = -(m\underline{a})$ যেখানে m একটি স্কেলার।

গ) $\frac{1}{|\underline{a}|}\underline{a}$ একটি একক ভেক্টর যার দিক ও $\underline{a}$ এর দিক একই

সমাধান:

ক) বিপরীত ভেক্টরের ধর্ম অনুযায়ী $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$

আবার $(-\underline{a}) + (-(-\underline{a})) = \underline{0}$

$\therefore (-\underline{a}) + (-(-\underline{a})) = \underline{a} + (-\underline{a})$

$\therefore (-(-\underline{a})) = \underline{a}$ [ভেক্টর যোগের বর্জনবিধি]

খ) $m\underline{a} + (-m)\underline{a} = [m + (-m)]\underline{a} = 0\underline{a} = \underline{0}$

$\therefore (-m)\underline{a} = -m\underline{a} \cdots\cdots (1)$

আবার $m\underline{a} + m(\underline{-a}) = m[\underline{a} + (-\underline{a})] = m\underline{0} = \underline{0}$

$\therefore m(-\underline{a}) = -m\underline{a} \cdots\cdots (2)$

(1) এবং (2) থেকে $(-m)\underline{a} = m(-\underline{a}) = -m\underline{a}$

গ) $\underline{a} \neq \underline{0}$ হওয়ায় $|\underline{a}| \neq 0$

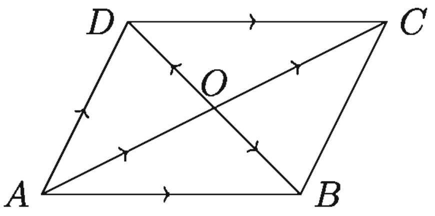
মনে করি, $\hat{a} = \frac{1}{|\underline{a}|}\underline{a}$

তাহলে $|\hat{a}| = \frac{1}{|\underline{a}|}|\underline{a}| = 1$ এবং $\hat{a}$ এর দিক ও $\underline{a}$ এর দিক একই। সুতরাং $\hat{a}$ একটি একক ভেক্টর যার দিক $\underline{a}$ মুখী।

উদাহরণ ২. $ABCD$ একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD।

ক) $\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।



সমাধান:

ক) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

আবার, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ বা, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$

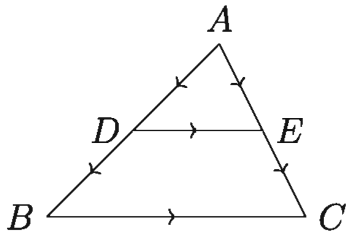
খ) যেহেতু সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

এবং $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

উদাহরণ ৩. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক।

সমাধান: মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। D ও E যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$।



ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে, $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE} \cdots\cdots (1)$

এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$ [$\because D, E$ বিন্দু যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ থেকে পাই

$2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, অর্থাৎ $2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BC}$

$\therefore 2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$ [(1) হতে]

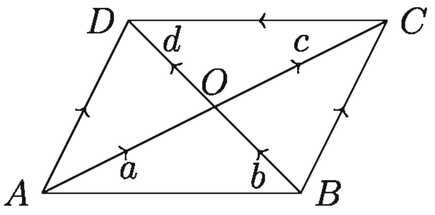
$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

এবং $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ বা $DE = \frac{1}{2}BC$

সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ DE এবং BC সমান্তরাল।

উদাহরণ ৪. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

সমাধান: মনে করি, $ABCD$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।



মনে করি, $\overrightarrow{AO} = \underline{a}, \overrightarrow{BO} = \underline{b}, \overrightarrow{OC} = \underline{c}, \overrightarrow{OD} = \underline{d}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $|\underline{a}| = |\underline{c}|, |\underline{b}| = |\underline{d}|$

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

যেহেতু সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$

বা, $\underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{d}$ [উভয় পক্ষে $-c - d$ যোগ করে]

এখানে $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এর ধারক AC, $\quad \therefore \underline{a} - \underline{c}$ এর ধারক AC।

$\underline{b}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক BD, $\quad \therefore \underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক BD।

$\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুইটি সমান অশূন্য ভেক্টর হলে তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু AC, BD দুইটি পরস্পরছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা। সুতরাং $\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

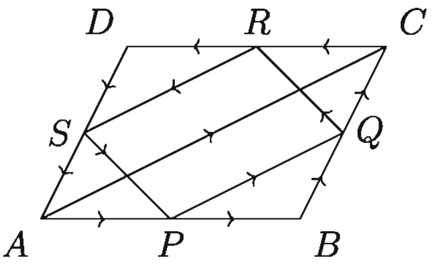
$\therefore \underline{a} - \underline{c} = \underline{0}$ বা $\underline{a} = \underline{c}$ এবং $\underline{b} - \underline{d} = \underline{0}$ বা $\underline{b} = \underline{d}$

$\therefore |\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

অর্থাৎ, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উদাহরণ ৫. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।

সমাধান: মনে করি, $ABCD$ চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু P, Q, R, S। P ও Q, Q ও R, R ও S, S ও P যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQRS$ একটি সামান্তরিক।



মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}, \overrightarrow{BC} = \underline{b}, \overrightarrow{CD} = \underline{c}, \overrightarrow{DA} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}), \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \underline{0}$

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = -\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore PQ$ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore PQRS$ একটি সামান্তরিক।

অনুশীলনী ১২

১. $AB \parallel DC$ হলে

   (i) $\overrightarrow{AB} = m \cdot \overrightarrow{DC}$ যেখানে m একটি স্কেলার রাশি

   (ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

   (iii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

   ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

   ক) i খ) ii

   গ) i ও ii ঘ) i, ii ও iii

২. দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে

   (i) এদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য

   (ii) এদের যোগের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ বিধি প্রযোজ্য

   (iii) এদের দৈর্ঘ্য সর্বদা সমান

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) ii
গ) i ও ii ঘ) i, ii ও iii

৩. $AB = CD$ এবং $AB \parallel CD$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ খ) $\overrightarrow{AB} = m \cdot \overrightarrow{CD}$, যেখানে $m > 1$
গ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} < \underline{0}$ ঘ) $\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{CD} = \underline{0}$, যেখানে $m > 1$

নিচের তথ্যের আলোকে ৪ ও ৫ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

AB রেখাংশের উপর যেকোনো বিন্দু C এবং কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, ও $\underline{c}$।

৪. $\overrightarrow{AA}$ ভেক্টর হচ্ছে

(i) বিন্দু ভেক্টর

(ii) একক ভেক্টর

(iii) শূন্য ভেক্টর

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii
গ) ii, iii ঘ) i, ii, ও iii

৫. $\triangle ABC$ এর ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?

ক) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ খ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$
গ) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \underline{0}$ ঘ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \underline{0}$

৬. $ABCD$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$।

৭. দেখাও যে,

ক) $-(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$ খ) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ হলে $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

৮. দেখাও যে,

ক) $\underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ খ) $(m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$
গ) $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} - m\underline{b}$

৯. দেখাও যে,

ক) $\underline{a}$, $\underline{b}$ প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর হলে, $\underline{a} = m\underline{b}$ হতে পারে কেবলমাত্র যদি $\underline{a}$, $\underline{b}$ এর সমান্তরাল হয়।

খ) $\underline{a}$, $\underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$ হলে, $m = n = 0$

১০. A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ হলে দেখাও যে, $ABCD$ সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

১১. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী।

১২. প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হয়।

১৩. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

১৪. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক।

১৫. $\triangle ABC$ এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

ক) $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $BC \parallel DE$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

গ) $BCED$ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$

১৬. $\triangle ABC$ এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F।

ক) $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ) প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$

গ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে।

অধ্যায় ১৩

ঘন জ্যামিতি (Solid Geometry)

বাস্তব জীবনে আমাদের বিভিন্ন আকারের ঘনবস্তুর প্রয়োজন এবং আমরা সেগুলো সর্বদা ব্যবহারও করে থাকি। এর মধ্যে সুষম আকারের ঘনবস্তু যেমন আছে, তেমনি আছে বিষম আকারের ঘনবস্তুও। তবে এই অধ্যায়ে সুষম আকারের ঘনবস্তু এবং দুইটি সুষম ঘনবস্তুর সমন্বয়ে গঠিত যৌগিক ঘনবস্তুর আয়তন ও পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় পদ্ধতি আলোচনা করা হবে।

এ অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা ---

- ঘনবস্তুর প্রতীকীয় চিত্র অঙ্কন করতে পারবে।
- প্রিজম, পিরামিড আকৃতির বস্তু, গোলক ও সমবৃত্তভূমিক কোণকের আয়তন এবং পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে।
- ঘন জ্যামিতির ধারণা প্রয়োগ করে সমস্যা সমাধান করতে পারবে।
- যৌগিক ঘনবস্তুর আয়তন ও পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করতে পারবে।
- ঘন জ্যামিতির ধারণা ব্যবহারিক ক্ষেত্রে প্রয়োগ করতে পারবে।

মৌলিক ধারণা

মাধ্যমিক জ্যামিতিতে বিন্দু, রেখা ও তলের মৌলিক ধারণা আলোচিত হয়েছে। ঘন জ্যামিতিতেও বিন্দু, রেখা ও তলকে মৌলিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করা হয়।

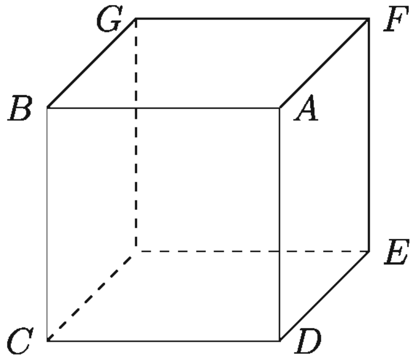
১. বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা প্রত্যেকটিকে ঐ বস্তুর মাত্রা (dimension) বলা হয়।

২. বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নেই। এটি একটি ধারণা। বাস্তবে বিন্দু বুঝানোর জন্য আমরা একটি ডট (.) ব্যবহার করি। একে অবস্থানের প্রতিরূপ বলা যেতে পারে। সুতরাং বিন্দুর কোনো মাত্রা নেই। তাই বিন্দু শূন্য মাত্রিক।

৩. রেখার কেবল দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও উচ্চতা নেই। তাই রেখা একমাত্রিক। যেমন, নিচের চিত্রে AB।

৪. তলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, উচ্চতা নেই। তাই তল দ্বিমাত্রিক। যেমন, নিচের চিত্রে $ABGF$।

৫. যে বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে, তাকে ঘনবস্তু বলা হয়। সুতরাং ঘনবস্তু ত্রিমাত্রিক। যেমন, নিচের চিত্রে $ABCDEFG$।



কতিপয় প্রাথমিক সংজ্ঞা

সাধারণত ত্রিমাত্রিক বস্তুর ছবি দ্বিমাত্রিক কাগজ বা বোর্ডে অঙ্কন কিছুটা জটিল। তথাপিও শ্রেণিকক্ষে পাঠদানকালে প্রত্যেকটি সংজ্ঞার ব্যাখ্যার সঙ্গে তার একটি চিত্র অঙ্কন করে দেখিয়ে দিলে বিষয়টি শিক্ষার্থীদের পক্ষে বুঝা ও মনে রাখা সহজতর হবে।

১. **সমতল (Plane surface):** কোনো তলের উপরস্থ যেকোনো দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সম্পূর্ণরূপে ঐ তলের উপর অবস্থিত হলে, ঐ তলকে সমতল বলা হয়। পুকুরের পানি স্থির থাকলে ঐ পানির উপরিভাগ একটি সমতল। সিমেন্ট দিয়ে নির্মিত বা মোজাইককৃত ঘরের মেঝেকে আমরা সমতল বলে থাকি। কিন্তু জ্যামিতিকভাবে তা সমতল নয়। ঘরের মেঝেতে কিছু উঁচু-নিচু থাকেই। উপরের চিত্রে $ABCD$, $ADEF$, $ABGF$ প্রতিটিই এক একটি সমতল।

দ্রষ্টব্য: অন্য কিছু উল্লেখ না থাকলে ঘন জ্যামিতিতে রেখা বা দৈর্ঘ্য এবং তলের বিস্তার অসীম (infinite) বা অনির্দিষ্ট মনে করা হয়। সুতরাং তলের সংজ্ঞা থেকে অনুমান করা যায় যে, কোনো সরল রেখার একটি অংশ কোনো তলের উপর থাকলে ঐ সরল রেখার অপর কোনো অংশ ঐ তলের বাইরে থাকতে পারে না।

২. **বক্রতল (Curved surface):** কোনো তলের উপর অবস্থিত যে কোনো দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সম্পূর্ণরূপে ঐ তলের উপর অবস্থিত না হলে, ঐ তলকে বক্রতল বলা হয়। গোলকের পৃষ্ঠতল একটি বক্রতল।

৩. **ঘন জ্যামিতি (Solid geometry):** গণিত শাস্ত্রের যে শাখার সাহায্যে ঘনবস্তু এবং তল, রেখা ও বিন্দুর ধর্ম জানা যায়, তাকে ঘন জ্যামিতি (geometry of space) বলা হয়। কখনও কখনও একে জাগতিক জ্যামিতি (geometry of space) বা ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিও (geometry of three dimensions) বলা হয়।

৪. **একতলীয় রেখা (Coplanar straight lines):** একাধিক সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত হলে, বা তাদের সকলের মধ্য দিয়ে একটি সমতল অঙ্কন সম্ভব হলে ঐ সরলরেখাগুলোকে একতলীয় রেখা বলা হয়। উপরের চিত্রে AB ও CD এক তলীয় রেখা, কিন্তু EF তাদের সাথে একতলীয় নয়।

৫. **নৈকতলীয় রেখা (Skew or non coplanar lines):** একাধিক সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত না হলে বা তাদের মধ্য দিয়ে একটি সমতল অঙ্কন করা সম্ভব না হলে এগুলোকে

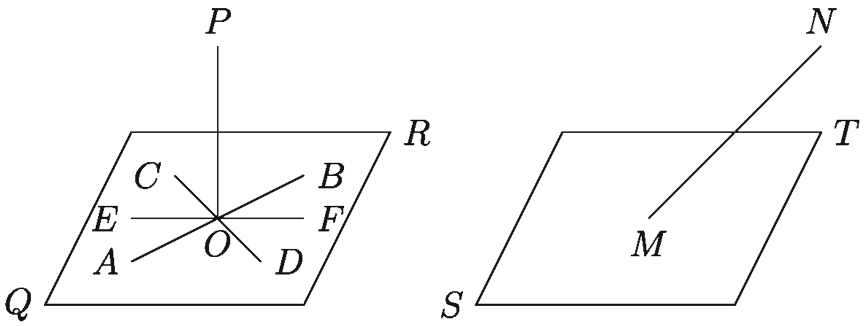
নৈকতলীয় সরলরেখা বলা হয়। উপরের চিত্রে AB ও EF নৈকতলীয় রেখা। দুইটি পেন্সিলকে একটির উপর আর একটি দিয়ে যোগ বা গুণচিহ্ন আকৃতির একটি বস্তু তৈরি করলেই দুইটি নৈকতলীয় সরলরেখা উৎপন্ন হবে।

৬. **সমান্তরাল সরলরেখা (Parallel lines):** দুইটি একতলীয় সরলরেখা যদি পরস্পর ছেদ না করে অর্থাৎ যদি তাদের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে, তবে তাদের সমান্তরাল সরলরেখা বলা হয়। উপরের চিত্রে AB ও CD সমান্তরাল সরল রেখা।

৭. **সমান্তরাল তল (Parallel planes):** দুইটি সমতল যদি পরস্পর ছেদ না করে অর্থাৎ যদি তাদের কোনো সাধারণ রেখা না থাকে তবে ঐ তলদ্বয়কে সমান্তরাল তল বলা হয়। উপরের চিত্রে $ABCD$ ও তার বিপরীত পাশে থাকা EFG সমতল দুটি পরস্পরের সমান্তরাল তল।

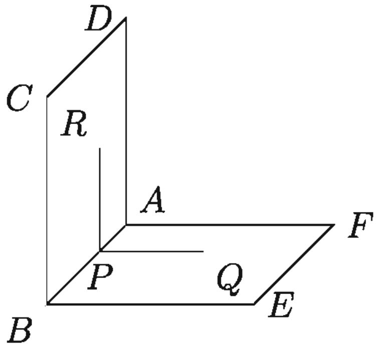
৮. **সমতলের সমান্তরাল রেখা (Parallel to a plane):** একটি সরলরেখা ও একটি সমতলকে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত করলেও যদি তারা পরস্পর ছেদ না করে, তবে ঐ সরলরেখাকে উক্ত তলের সমান্তরাল রেখা বলা হয়। উপরের চিত্রে CD সরল রেখা $ABGF$ সমতলের সমান্তরাল রেখা।

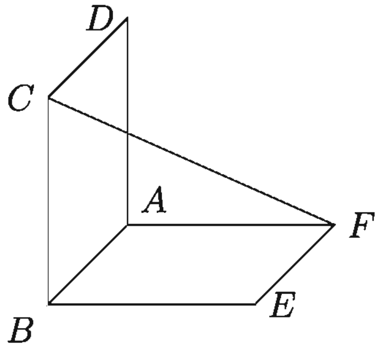
৯. **তলের লম্ব রেখা (Normal or perpendicular to a plane):** কোনো সরলরেখা একটি সমতলের উপরস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ সমতলের উপর অঙ্কিত যেকোনো রেখার উপর লম্ব হলে, উক্ত সরলরেখাকে ঐ সমতলের উপর লম্ব বলা হয়। নিচের বামের চিত্রে OP রেখা QR সমতলের উপর লম্ব, কারণ OP রেখা QR সমতলে থাকা AB, CD, EF প্রতিটি রেখার ওপরেই লম্ব।



১০. **তির্যক (Oblique) রেখা:** কোনো সরলরেখা একটি সমতলের সাথে সমান্তরাল বা লম্ব না হলে, ঐ সরলরেখাকে সমতলের তির্যক রেখা বলা হয়। উপরের ডানের চিত্রে MN, ST এর তির্যক রেখা।

১১. **উল্লম্ব (Vertical) রেখা বা তল:** স্থির অবস্থায় ঝুলন্ত ওলনের সুতার সঙ্গে সমান্তরাল কোনো রেখা বা তলকে খাড়া বা উল্লম্ব তল বলে। নিচের বামের চিত্রে $ABCD$ উল্লম্ব তল এবং PR উল্লম্ব রেখা।

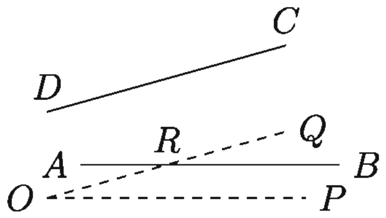




১২. **অনুভূমিক (Horizontal) তল ও রেখা:** কোনো সমতল একটি খাড়া সরলরেখার সাথে লম্ব হলে, তাকে শয়ান বা অনুভূমিক তল বলা হয়। আবার কোনো অনুভূমিক তলে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখাকে অনুভূমিক সরলরেখা বলা হয়। উপরের বামের চিত্রে $ABEF$ একটি অনুভুমিক সমতল এবং PQ একটি অনুভুমিক সরলরেখা।

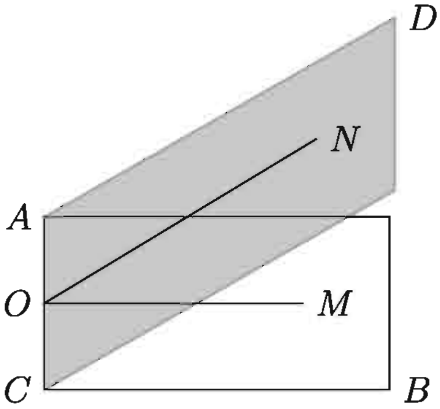
১৩. **সমতল (Planar) ও নৈকতলীয় (Skew) চতুর্ভুজ:** কোনো চতুর্ভুজের বাহুগুলো সব একই তলে অবস্থিত হলে, তাকে সমতলীয় চতুর্ভুজ বলা হয়। আবার কোনো চতুর্ভুজের বাহুগুলো সকলে একই তলে অবস্থিত না হলে, ঐ চতুর্ভুজকে নৈকতলীয় চতুর্ভুজ বলা হয়। নৈকতলীয় চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু একতলে এবং অপর দুইটি অন্য তলে অবস্থিত। সুতরাং কোনো নৈকতলীয় চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় নৈকতলীয়। উপরের ডানের চিত্রে $ABEF$ একটি সমতলীয় চতুর্ভুজ এবং $BCFE$ একটি নৈকতলীয় চতুর্ভুজ।

১৪. **নৈকতলীয় রেখার (Skew lines) অন্তর্গত কোণ:** দুইটি নৈকতলীয় রেখার অন্তর্গত কোণ তাদের যেকোনো একটি ও তার উপরস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত অপরটির সমান্তরাল রেখার অন্তর্গত কোণের সমান। আবার দুইটি নৈকতলীয় রেখার প্রত্যেকের সমান্তরাল দুইটি রেখা কোনো বিন্দুতে অঙ্কন করলে ঐ বিন্দুতে উৎপন্ন কোণের পরিমাণও নৈকতলীয় রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান।



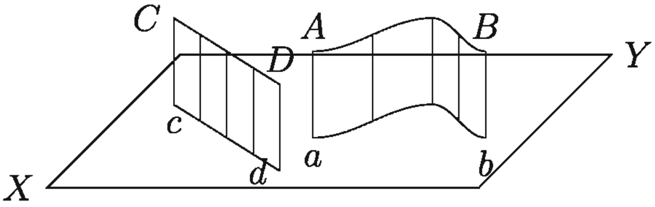
মনে করি, AB ও CD দুইটি নৈকতলীয় রেখা। যেকোনো O বিন্দুতে AB ও CD এর সমান্তরাল যথাক্রমে OP এবং OQ রেখাদ্বয় অঙ্কন করলে $\angle POQ$ ই AB ও CD এর অন্তর্গত কোণ নির্দেশ করবে। অন্য কথায় $\angle BRQ$ ও AB ও CD এর অন্তর্গত কোণ নির্দেশ করে যেখানে R বিন্দুটি AB এর ওপর অবস্থিত এবং QR তো অবশ্যই CD এর সমান্তরাল।

১৫. **দ্বিতল কোণ (Dihedral angle):** দুইটি সমতল সরলরেখায় ছেদ করলে তাদের ছেদ রেখাস্থ যেকোনো বিন্দু থেকে ঐ সমতলদ্বয়ের প্রত্যেকের উপর ঐ ছেদ রেখার সাথে লম্ব এরূপ একটি করে রেখা অঙ্কন করলে উৎপন্ন কোণই ঐ সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত দ্বিতল কোণ।



AB ও CD সমতলদ্বয় AC রেখায় পরস্পর ছেদ করেছে। AC রেখাস্থ O বিন্দুতে AB সমতলে OM এবং CD সমতলে ON এরূপ দুইটি সরলরেখা অঙ্কন করা হলো যেন তারা উভয়ই AC এর সঙ্গে O বিন্দুতে লম্ব হয়। তাহলে $\angle MON$ ই AB ও CD সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত দ্বিতল কোণ সূচিত করে। দুইটি পরস্পচ্ছেদী সমতলের অন্তর্গত দ্বিতল কোণের পরিমাণ এক সমকোণ হলে ঐ সমতলদ্বয় পরস্পর লম্ব।

১৬. **অভিক্ষেপ (Projection):** কোনো বিন্দু থেকে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর বা কোনো সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বরেখার পাদবিন্দুকে ঐ রেখা বা সমতলের উপর উক্ত বিন্দুর পাতন বা অভিক্ষেপ (projection) বলা হয়। কোনো সরলরেখা বা বক্ররেখার সকল বিন্দু থেকে কোনো নির্দিষ্ট সমতলের উপর অঙ্কিত লম্বগুলোর পাদবিন্দুসমূহের সেটকে ঐ সমতলের উপর উক্ত সরলরেখা বা বক্ররেখার অভিক্ষেপ বলা হয়। এই অভিক্ষেপকে লম্ব অভিক্ষেপও (orthogonal projection) বলা হয়। চিত্রে XY সমতলের উপর একটি বক্ররেখা AB ও একটি সরলরেখা CD এর অভিক্ষেপ যথাক্রমে বক্ররেখা ab ও সরলরেখা cd দেখানো হয়েছে।



দুইটি সরলরেখার মধ্যে সম্পর্ক

ক) দুইটি সরলরেখা একতলীয় হতে পারে, সেক্ষেত্রে তারা অবশ্যই সমান্তরাল হবে বা কোনো এক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করবে।

খ) দুইটি সরলরেখা নৈকতলীয় হতে পারে, সেক্ষেত্রে তারা সমান্তরালও হবে না কিংবা কোনো বিন্দুতে ছেদও করবে না।

স্বতঃসিদ্ধ

ক) কোনো সমতলের উপরস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত করলেও তা সম্পূর্ণভাবে ঐ সমতলে অবস্থিত থাকবে। সুতরাং একটি সরলরেখা ও একটি সমতলের মধ্যে

দুইটি সাধারণ বিন্দু থাকলে, ঐ সরলরেখা বরাবর তাদের মধ্যে অসংখ্য সাধারণ বিন্দু থাকবে।

খ) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা একটি সরলরেখার মধ্য দিয়ে অসংখ্য সমতল অঙ্কন করা যায়।

সরলরেখা ও সমতলের মধ্যে সম্পর্ক

ক) কোনো সরলরেখা কোনো সমতলের সমান্তরাল হলে তাদের মধ্যে কোনো সাধারণ বিন্দু থাকবে না।

খ) কোনো সরলরেখা কোনো সমতলকে ছেদ করলে তাদের মধ্যে মাত্র একটি সাধারণ বিন্দু থাকবে।

গ) যদি কোনো সরলরেখা ও সমতলের দুইটি সাধারণ বিন্দু থাকে, তাহলে সম্পুর্ণ সরলরেখাটি ঐ সমতলে অবস্থিত হবে।

দুইটি সমতলের মধ্যে সম্পর্ক

ক) দুইটি সমতল পরস্পর সমান্তরাল হলে তাদের মধ্যে কোনো সাধারণ বিন্দু থাকবে না।

খ) দুইটি সমতল পরস্পরছেদী হলে তারা একটি সরলরেখায় ছেদ করবে এবং তাদের অসংখ্য সাধারণ বিন্দু থাকবে।

ঘনবস্তু

আমরা জানি, একখানা বই বা একখানা ইট বা একটি বাক্স বা একটি গোলাকার বল সবই ঘনবস্তু। তারা প্রত্যেকেই কিছু পরিমান স্থান (space) দখল করে থাকে। আবার একখন্ড পাথর বা কাঠ, ইটের একটি খন্ড, কয়লার টুকরা, এঁটেল মাটির শুকনা খন্ড ইত্যাদিও ঘনবস্তুর উদাহরণ। তবে এগুলো বিষম ঘনবস্তু।

সমতল অথবা বক্রতল দ্বারা বেষ্টিত শূন্যের কিছুটা স্থান দখল করে থাকে এরূপ বস্তুকে ঘনবস্তু (solid) বলা হয়। সমতলস্থ কোনো স্থানকে বেষ্টন করতে হলে যেমন কমপক্ষে তিনটি সরল রেখা দরকার তেমনি জাগতিক কোনো স্থানকে বেষ্টন করতে হলে অন্তত চারটি সমতল দরকার। এই তলগুলো ঘনবস্তুর তল বা **পৃষ্ঠতল (surface)** এবং এদের দুটি সমতল যে রেখায় ছেদ করে, তাকে ঐ ঘনবস্তুর **ধার (edge)** বলা হয়। একটি বাক্সের বা একখানা ইটের ছয়টি পৃষ্ঠতল আছে এবং বারটি ধার আছে। একটি ক্রিকেট বল মাত্র একটি বক্রতল দ্বারা আবদ্ধ।

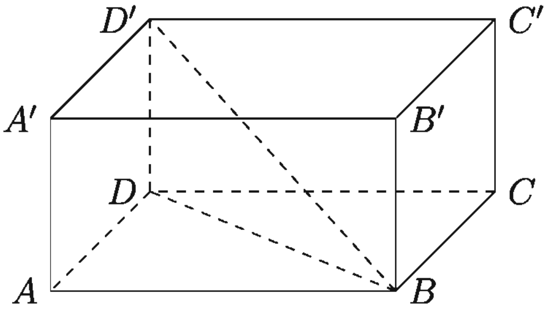
কাজ:

ক) তোমরা প্রত্যেকে একটি করে সুষম ঘনবস্তু ও বিষম ঘনবস্তুর নাম লিখ।

খ) তোমার উল্লেখিত ঘনবস্তুগুলোর কয়েকটি ব্যবহার লিখ।

সুষম ঘনবস্তুর আয়তন ও তলের ক্ষেত্রফল

১. আয়তিক ঘন বা আয়তাকার ঘনবস্তু (Rectangular Parallelopiped)



তিনজোড়া সমান্তরাল সমতল দ্বারা আবদ্ধ ঘনবস্তুকে সামান্তরিক ঘনবস্তু বলা হয়। এই ছয়টি সমতলের প্রত্যেকটি একটি সামান্তরিক এবং বিপরীত পৃষ্ঠগুলো সর্বতোভাবে সমান। সামান্তরিক ঘনবস্তুর ছয়টি তলে বিভক্ত বারটি ধার আছে।

যে সামান্তরিক ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলগুলো আয়তক্ষেত্র, তাকে আয়তাকার ঘনবস্তু বলা হয়। যে আয়তাকার ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলগুলো বর্গক্ষেত্র, তাকে ঘনক বলা হয়। উপরোক্ত চিত্রে আয়তাকার ঘনবস্তুর এবং ঘনকের পৃষ্ঠগুলো $ABCD$, $A'B'C'D'$, $BCC'B'$, $ADD'A'$, $ABB'A'$, $DCC'D'$ এবং ধারগুলো AB, $A'B'$, CD, $C'D'$, BC, $B'C'$, AD, $A'D'$, AA', BB', CC', DD'। তবে চিত্রে কেবল একটি কর্ণ BD' দেখানো হয়েছে, অন্যগুলো অনুরূপভাবে আঁকতে হবে।

মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে $AB = a$ একক, $AD = b$ একক এবং $AA' = c$ একক।

ক) আয়তাকার ঘনবস্তুর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল (Area of the whole surface)

$=$ ছয়টি পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি

$= 2(ABCD$ তলের ক্ষেত্রফল $+ABB'A'$ তলের ক্ষেত্রফল $+ADD'A'$ তলের ক্ষেত্রফল$)$

$= 2(ab + ac + bc)$ বর্গ একক $= 2(ab + bc + ca)$ বর্গ একক

খ) আয়তন (Volume) $= AB \times AD \times AA'$ ঘন একক $= abc$ ঘন একক

গ) কর্ণ $BD' = \sqrt{BD^2 + DD'^2} = \sqrt{AB^2 + AD^2 + DD'^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক

২. ঘনক (Cube) আকৃতির ঘনবস্তু

ঘনকের ক্ষেত্রে, $a = b = c$, অতএব

ক) সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $= 2(a^2 + a^2 + a^2) = 6a^2$ বর্গ একক

খ) আয়তন $= a \cdot a \cdot a = a^3$ ঘন একক

গ) কর্ণ $= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$ একক।

উদাহরণ ১. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত $4 : 3 : 2$ এবং তার সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল 468 বর্গমিটার হলে, তার কর্ণ ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে $4x,\ 3x$ ও $2x$ মিটার।

তাহলে, $2(4x \cdot 3x + 3x \cdot 2x + 2x \cdot 4x) = 468$

বা, $52x^2 = 468$ বা, $x^2 = 9 \ \therefore\ x = 3$

$\therefore$ ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 12 মিটার, প্রস্থ 9 মিটার এবং উচ্চতা 6 মিটার

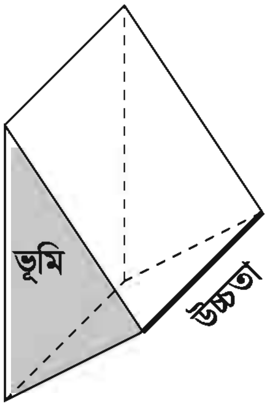
কর্ণের দৈর্ঘ্য = $\sqrt{12^2 + 9^2 + 6^2}$ মিটার = $\sqrt{144 + 81 + 36} = \sqrt{261}$ মিটার ≈ 16.16 মিটার (প্রায়)

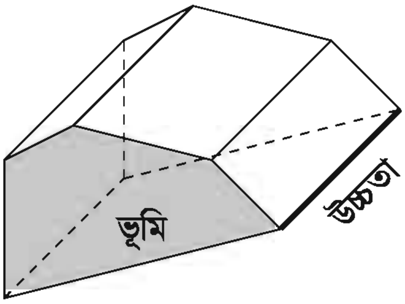
এবং আয়তন = $12 \times 9 \times 6 = 648$ ঘনমিটার।

কাজ: পিজবোর্ডের একটি ছোট বাক্স (কার্টুন অথবা ঔষধের বোতলের প্যাকেট) এর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা মেপে তার আয়তন, ছয়টি তলের ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৩. প্রিজম (Prism)

যে ঘনবস্তুর দুই প্রান্ত সর্বসম ও সমান্তরাল বহুভুজ দ্বারা আবদ্ধ এবং অন্যান্য তলগুলো সামান্তরিক তাকে প্রিজম বলে। প্রিজমের দুই প্রান্তকে ইহার **ভূমি** এবং অন্যান্য তলগুলোকে **পার্শ্বতল** বলে। সবগুলো পার্শ্বতল আয়তাকার হলে প্রিজমটিকে খাড়া বা **সমপ্রিজম** এবং অন্যক্ষেত্রে প্রিজমটিকে **তীর্যক প্রিজম** বলা হয়। বাস্তব ক্ষেত্রে খাড়া প্রিজমই অধিক ব্যবহৃত হয়। ভূমির তলের নামের উপর নির্ভর করে কোন প্রিজমের নামকরণ করা হয়। যেমন, ত্রিভুজাকার প্রিজম, চতুর্ভুজাকার প্রিজম, পঞ্চভুজাকার প্রিজম ইত্যাদি।





ভূমি সুষম বহুভূজ হলে প্রিজমকে **সুষম প্রিজম** (regular prism) বলে। ভূমি সুষম না হলে ইহাকে **বিষম প্রিজম** (irregular prism) বলা হয়। সংজ্ঞানুসারে আয়তাকার ঘনবস্তু ও ঘনক উভয়কেই প্রিজম বলা হয়। কাঁচের তৈরি খাড়া ত্রিভুজাকার প্রিজম আলোকরশ্মির বিচ্ছুরণের জন্য ব্যবহৃত হয়।

ক) প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= 2$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) $+$ পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল

$= 2$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) $+$ ভূমির পরিসীমা $\times$ উচ্চতা

খ) আয়তন $=$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

উদাহরণ ২. একটি ত্রিভুজাকার প্রিজমের ভূমির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $3, 4$ ও 5 সে.মি. এবং উচ্চতা 8 সে.মি.। ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

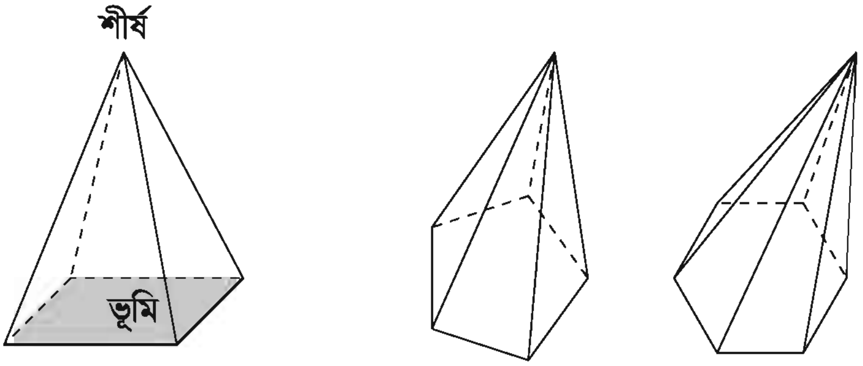
সমাধান: প্রিজমের ভূমির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $3, 4$ ও 5 সে.মি.।

যেহেতু $3^2 + 4^2 = 5^2$, ইহার ভূমি একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$ বর্গ সে.মি. সুতরাং, প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $2 \times 6 + (3 + 4 + 5) \times 8 = 12 + 96 = 108$ বর্গ সে.মি. এবং ইহার আয়তন = $6 \times 8 = 48$ ঘন সে.মি.

অতএব প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 108 বর্গ সে.মি. এবং আয়তন 48 ঘন সে.মি.।

৪. পিরামিড (Pyramid)

বহুভুজের উপর অবস্থিত যে ঘনবস্তুর একটি শীর্ষবিন্দু থাকে এবং যার পার্শ্বতলগুলোর প্রত্যেকটি ত্রিভুজাকার তাকে পিরামিড বলে।



পিরামিডের ভূমি যেকোনো আকারের বহুভুজ এবং তার পার্শ্বতলগুলোও যেকোনো ধরনের ত্রিভুজ হতে পারে। তবে ভূমি সুষম বহুভুজ এবং পার্শ্বতলগুলো সর্বসম ত্রিভুজ হলে তাকে **সুষম পিরামিড** বলা হয়। সুষম পিরামিডগুলো খুবই দৃষ্টিনন্দন। শীর্ষবিন্দু ও ভূমির যেকোনো কৌণিক বিন্দুর সংযোজক রেখাকে পিরামিডের ধার বলে। শীর্ষ হতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বদৈর্ঘ্যকে পিরামিডের **উচ্চতা** বলা হয়। তবে আমরা পিরামিড বলতে সচরাচর বর্গাকার ভূমির উপর অবস্থিত চারটি সর্বসম ত্রিভুজ দ্বারা বেষ্টিত ঘনবস্তুকেই বুঝি। এই ধরনের পিরামিডের বহুল ব্যবহার আছে।

চারটি সমবাহু ত্রিভুজ দ্বারা বেষ্টিত ঘনবস্তুকে **সুষম চতুস্থলক** (regular tetrahedron) বলে যা একটি পিরামিড। এই পিরামিডের $3 + 3 = 6$ টি ধার ও 4 টি কৌণিক বিন্দু আছে। ইহার শীর্ষ হতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমির ভরকেন্দ্রে পতিত হয়।

ক) পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=$ ভূমির ক্ষেত্রফল $+$ পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল

কিন্তু পার্শ্বতলগুলো সর্বসম ত্রিভুজ হলে,

পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=$ ভূমির ক্ষেত্রফল $+\frac{1}{2}$ (ভূমির পরিধি $\times$ হেলানো উচ্চতা)

কোনো পিরামিডের উচ্চতা h, ভূমিক্ষেত্রের অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং হেলানো উচ্চতা l হলে, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

খ) আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

উদাহরণ ৩. 10 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট বর্গাকার ভূমির উপর অবস্থিত একটি পিরামিডের উচ্চতা 12 সে.মি.। ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: পিরামিডের ভূমির কেন্দ্রবিন্দু হতে যেকোনো বাহুর লম্ব দূরত্ব $r = \frac{10}{2}$ সে.মি. $= 5$ সে.মি., পিরামিডের উচ্চতা 12 সে.মি.।

অতএব ইহার যেকোনো পার্শ্বতলের হেলানো উচ্চতা $= \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ সে.মি.।

$\therefore$ পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= [10 \times 10 + \frac{1}{2}(4 \times 10) \times 13]$ বর্গ সে.মি.
$= 100 + 260 = 360$ বর্গ সে.মি.

এবং ইহার আয়তন $= \frac{1}{3} \times (10 \times 10) \times 12$ ঘন সে.মি. $= 10 \times 10 \times 4 = 400$ ঘন সে.মি.।

অতএব পিরামিডটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 360 বর্গ সে.মি. এবং আয়তন 400 ঘন সে.মি.।

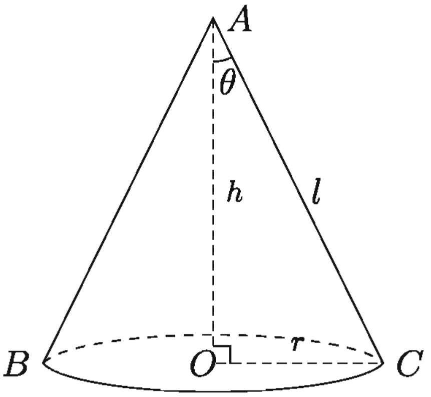
কাজ:

ক) প্রত্যেকে একটি করে সুষম ও একটি করে বিষম (১) প্রিজম ও (২) পিরামিড আঁক।

খ) যেক্ষেত্রে সম্ভব, তোমার অঙ্কিত ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

৫. সমবৃত্তভূমিক কোণক (Right circular cone)

কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন একটি বাহুকে অক্ষ (axis) ধরে তার চতুর্দিকে ত্রিভুজটিকে একবার ঘুরিয়ে আনলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, তাকে সমবৃত্তভূমিক কোণক বলা হয়।



চিত্রে, OAC সমকোণী ত্রিভুজকে OA রেখার চতুর্দিকে ঘোরানোর ফলে ABC সমবৃত্তভূমিক কোণক উৎপন্ন হয়েছে। এক্ষেত্রে ত্রিভুজের শীর্ষকোণ $\angle OAC = \theta$ হলে, θ কে কোণকের অর্ধশীর্ষকোণ (semi vertical angle) বলা হয়।

কোণকের উচ্চতা $OA = h$, ভূমির ব্যাসার্ধ $OC = r$ এবং হেলানো উচ্চতা $AC = l$ হলে

ক) বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমির পরিধি $\times$ হেলানো উচ্চতা
$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l = \pi r l$ বর্গ একক

খ) সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=$ বক্রতলের ক্ষেত্রফল $+$ ভূমিতলের ক্ষেত্রফল
$= \pi r l + \pi r^2 = \pi r(r + l)$ বর্গ একক

গ) আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা
$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক। [আয়তনের এই সূত্রটি নির্ণয় পদ্ধতি উচ্চতর শ্রেণিতে শিখানো হবে]

উদাহরণ ৪. একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের উচ্চতা 12 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাস 10 সে.মি. হলে তার হেলানো উচ্চতা, বক্রতলের ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: ভূমির ব্যাসার্ধ $r = \frac{10}{2}$ সে.মি. $= 5$ সে.মি.

হেলানো উচ্চতা $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ সে.মি.

বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r l = \pi \times 5 \times 13 = 204.2035$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

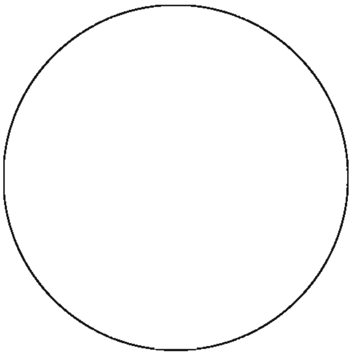
সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r(l + r) = \pi \times 5 \times (13 + 5) = 282.7433$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

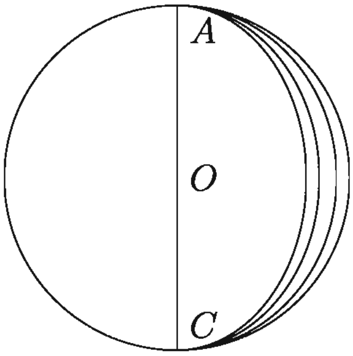
আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 12 = 314.1593$ ঘন সে.মি. (প্রায়)।

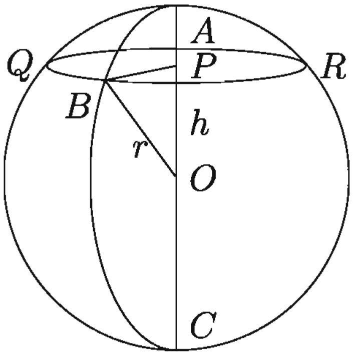
কাজ: জন্মদিনে বা অন্যান্য আনন্দ উৎসবে ব্যবহৃত কোণক আকৃতির একটি ক্যাপ সংগ্রহ করে তার বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

৬. গোলক (Sphere)

কোনো অর্ধবৃত্ত ক্ষেত্রের ব্যাসকে অক্ষ ধরে ঐ ব্যাসের চতুর্দিকে অর্ধবৃত্ত ক্ষেত্রকে একবার ঘুরিয়ে আনলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তাকে গোলক বলে। অর্ধবৃত্তটির কেন্দ্রই গোলকের কেন্দ্র। এই ঘূর্ণনের ফলে অর্ধবৃত্ত যে তল উৎপন্ন করে তাই হল গোলকের তল।







$CQAR$ গোলকের কেন্দ্র O, ব্যাসার্ধ $OA = OB = OC$ এবং কেন্দ্র O থেকে h দূরত্বে P বিন্দুর মধ্য দিয়ে OA রেখার সাথে লম্ব হয় এরূপ একটি সমতল গোলকটিকে ছেদ করে একটি QBR বৃত্ত উৎপন্ন করেছে। এই বৃত্তের কেন্দ্র P এবং ব্যাসার্ধ PB।

$\therefore OB^2 = OP^2 + PB^2$

$\therefore PB^2 = OB^2 - OP^2 = r^2 - h^2$

গোলকের ব্যাসার্ধ r হলে,

ক) গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ একক।

খ) আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক।

গ) h উচ্চতায় তলচ্ছেদে উৎপন্ন বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{r^2 - h^2}$ একক।

কাজ: একটি খেলনা বল বা ফুটবল নিয়ে তার ব্যাসার্ধ ও আয়তন নির্ণয় কর।

উদাহরণ ৫. 4 সে.মি. ব্যাসের একটি লৌহ গোলককে পিটিয়ে $\frac{2}{3}$ সে.মি. পুরু একটি বৃত্তাকার লৌহপাত প্রস্তুত করা হল। ঐ পাতের ব্যাসার্ধ কত?

সমাধান: লৌহ গোলকের ব্যাসার্ধ $= \frac{4}{2} = 2$ সে.মি.।

$\therefore$ তার আয়তন $= \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$ ঘন সে.মি.।

মনে করি, পাতের ব্যাসার্ধ $= r$ সে.মি.। পাতটি $\frac{2}{3}$ সে.মি. পুরু।

$\therefore$ পাতের আয়তন $= \pi r^2 \times \frac{2}{3}$ ঘন সে.মি. $= \frac{2}{3}\pi r^2$।

শর্তানুসারে, $\frac{2}{3}\pi r^2 = \frac{32}{3}\pi$ বা, $r^2 = 16$ বা, $r = 4$

$\therefore$ পাতের ব্যাসার্ধ $= 4$ সে.মি.

উদাহরণ ৬. সমান উচ্চতা বিশিষ্ট একটি সমবৃত্তভূমিক কোণক, একটি অর্ধ গোলক ও একটি সিলিন্ডার সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত। দেখাও যে, তাদের আয়তনের অনুপাত $1:2:3$।

সমাধান: মনে করি, সাধারণ উচ্চতা ও ভূমির ব্যাসার্ধ যথাক্রমে h এবং r একক। যেহেতু অর্ধ গোলকের উচ্চতা ও ব্যাসার্ধ সমান সুতরাং, $h = r$

তাহলে কোণকের আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3$ ঘন একক

অর্ধ গোলকের আয়তন $= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3}\pi r^3$ ঘন একক

সিলিন্ডারের আয়তন $= \pi r^2 h = \pi r^3$ ঘন একক

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $= \frac{1}{3}\pi r^3 : \frac{2}{3}\pi r^3 : \pi r^3 = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} : 1 = 1:2:3$

উদাহরণ ৭. একটি আয়তাকার লৌহ ফলকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে $10, 8$ ও $5\frac{1}{2}$ সে.মি.। এই ফলকটিকে গলিয়ে $\frac{1}{2}$ সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট কতগুলো গোলাকার গুলি প্রস্তুত করা যাবে?

সমাধান: লৌহ ফলকের আয়তন $= 10 \times 8 \times 5\frac{1}{2}$ ঘন সে.মি. $= 440$ ঘন সে.মি.

মনে করি, গুলির সংখ্যা $= n$

$\therefore$ n সংখ্যক গুলির আয়তন $= n \times \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{n\pi}{6}$ ঘন সে.মি.

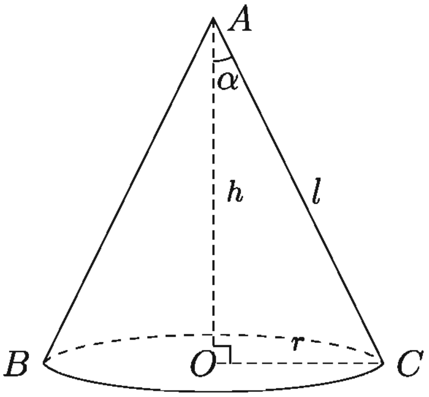
প্রশ্নানুসারে, $\frac{n\pi}{6} = 440$ বা, $n = \frac{440 \times 6}{\pi} = 840.34$

$\therefore$ নির্ণেয় গুলির সংখ্যা 840 টি।

উদাহরণ ৮. একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের আয়তন V, বক্রতলের ক্ষেত্রফল S, ভূমির ব্যাসার্ধ r, উচ্চতা h এবং অর্ধ শীর্ষকোণ α হলে দেখাও যে,

ক) $S = \frac{\pi h^2 \tan\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\pi r^2}{\sin\alpha}$ বর্গ একক

খ) $V = \frac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\alpha = \frac{\pi r^3}{3\tan\alpha}$ ঘন একক



সমাধান: উপরের চিত্রে, কোণকের উচ্চতা $OA = h$ হেলানো উচ্চতা $AC = l$, ভূমির ব্যাসার্ধ $OC = r$ এবং অর্ধ শীর্ষকোণ $\angle OAC = \alpha$। সুতরাং, হেলানো উচ্চতা $l = \sqrt{h^2 + r^2}$।

চিত্র হতে দেখা যায় যে, $\tan\alpha = \dfrac{r}{h}$

$\therefore r = h\tan\alpha$ বা, $h = \dfrac{r}{\tan\alpha} = r\cot\alpha$

ক) $S = \pi rl = \pi r\sqrt{h^2 + h^2\tan^2\alpha} = \pi rh\sqrt{1 + \tan^2\alpha} = \pi rh\sqrt{\sec^2\alpha}$ $= \pi rh\sec\alpha = \pi(h\tan\alpha)h\sec\alpha = \dfrac{\pi h^2\tan\alpha}{\cos\alpha}$ বর্গ একক

আবার, $S = \pi rh\sec\alpha = \dfrac{\pi r}{\cos\alpha} r\cot\alpha = \dfrac{\pi r^2}{\cos\alpha}\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\pi r^2}{\sin\alpha}$ বর্গ একক

খ) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi(h\tan\alpha)^2 h = \dfrac{1}{3}\pi h^3\tan^2\alpha = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{r}{\tan\alpha}\right)^3\tan^2\alpha$ $= \dfrac{\pi r^3}{3\tan\alpha}$ ঘন একক

৭. যৌগিক ঘনবস্তু (Compound solid)

দুইটি ঘনবস্তুর সমন্বয়ে গঠিত ঘনবস্তুকে যৌগিক ঘনবস্তু বলে। নিম্নে যৌগিক ঘনবস্তুর কিছু উদাহরণ দেয়া হল:

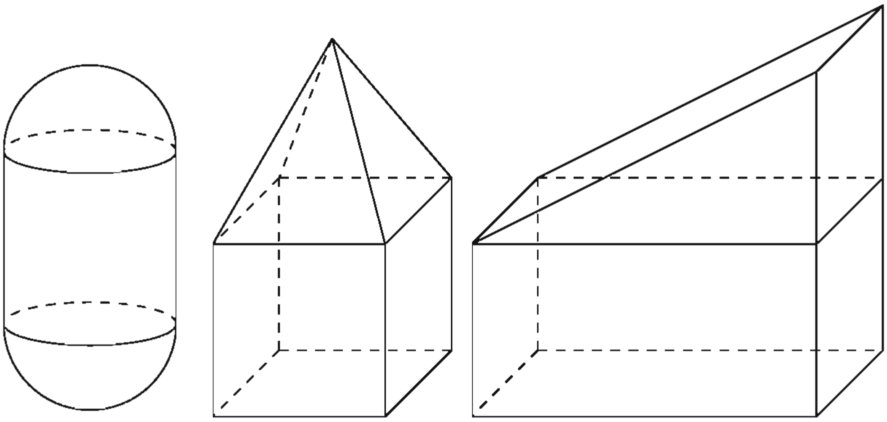
ক) একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর উপরের তল যদি একটি খাড়া প্রিজমের কোনো একটি তলের সমান হয় তবে ঘনবস্তুর উপর মিলিয়ে প্রিজমটি বসালে একটি যৌগিক ঘনবস্তু হয়।

খ) একটি প্রিজমের ভূমি ও একটি চতুস্তলকের ভূমি সর্বসম হলে এবং চতুস্তলকটিকে প্রিজমের উপর বসালে একটি যৌগিক ঘনবস্তু হয়।

গ) একটি অর্ধগোলকের ব্যাসার্ধ ও একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ সমান হলে এবং কোণকটিকে অর্ধগোলকের উপর বসালে একটি নতুন ঘনবস্তু সৃষ্টি হয়।

ঘ) দুইটি অর্ধগোলক ও একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের সমন্বয়ে গঠিত যৌগিক ঘনবস্তুকে ক্যাপসুল বলা যেতে পারে।

এভাবে দুই বা দুইয়ের অধিক ঘনবস্তুর সমন্বয়ে বিভিন্ন প্রকারের যৌগিক ঘনবস্তু তৈরি করা যায়। অনেক দৃষ্টিনন্দন স্থাপনাও যৌগিক ঘনবস্তু। ব্যায়াম করার অনেক উপকরণও একাধিক ঘনবস্তুর সমন্বয়ে তৈরি করা হয়।



কাজ: তোমরা প্রত্যেকে একটি করে যৌগিক ঘনবস্তু অঙ্কন কর ও ইহার বর্ণনা দাও। সম্ভব হলে ইহার তলসমূহের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয়ের সূত্র লিখ।

উদাহরণ ৯. একটি ক্যাপসুলের দৈর্ঘ্য 15 সে.মি.। ইহার সিলিন্ডার আকৃতির অংশের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি. হলে, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান: ক্যাপসুলের সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য 15 সে.মি.। যেহেতু ক্যাপসুলের দুই প্রান্ত অর্ধগোলকাকৃতির, সেহেতু ইহার সিলিন্ডার আকৃতির অংশের দৈর্ঘ্য $l = 15 - (3 + 3) = 9$ সে.মি.।

সুতরাং ক্যাপসুলের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=$ দুই প্রান্তের অর্ধগোলাকৃতি অংশের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $+$ সিলিন্ডার আকৃতির অংশের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \frac{1}{2} \times 4\pi r^2 + 2\pi rl = 4\pi(3)^2 + 2\pi \times 3 \times 9 = 90\pi = 282.74$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)।

এবং ক্যাপসুলটির আয়তন

$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 l = \frac{4}{3}\pi(3)^3 + \pi(3)^2 \times 9 = 117\pi = 367.57$ ঘন সে.মি. (প্রায়)।

উদাহরণ ১০. একটি লোহার ফাঁপা গোলকের বাইরের ব্যাস 15 সে.মি. এবং বেধ 2 সে.মি.।

ক) গোলকের ফাঁপা অংশের আয়তন নির্ণয় কর।

খ) গোলকে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে একটি নিরেট গোলক তৈরি করা হল। নিরেট গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গ) নিরেট গোলকটি একটি ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে গেল। বাক্সটির অনধিকৃত অংশের আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক) দেওয়া আছে, গোলকের বাইরের ব্যাস 15 সে.মি.

$\therefore$ গোলকের বাইরের ব্যাসার্ধ $= \frac{15}{2}$ সে.মি. $= 7.5$ সে.মি. এবং গোলকের বেধ 2 সে.মি.

$\therefore$ গোলকের ফাঁপা অংশের ব্যাসার্ধ $= (7.5 - 2)$ সে.মি. $= 5.5$ সে.মি.

$\therefore$ গোলকের ফাঁপা অংশের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times (5.5)^3 = 696.9116$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

খ) এখানে, গোলকের ব্যাসার্ধ 7.5 সে.মি.

$\therefore$ গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi \times (7.5)^3 = 1767.15$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ গোলকে ব্যবহৃত লোহার আয়তন $= (1767.15 - 696.9116) = 1070.2384$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

মনে করি, নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ r সে.মি.

$\therefore$ নিরেট গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi \times r^3$ ঘন সে.মি.

যেহেতু ফাঁপা গোলকে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে নিরেট গোলকটি তৈরি করা হয়েছে, সেহেতু লোহার আয়তন নিরেট গোলকের আয়তনের সমান।

$\therefore \frac{4}{3}\pi \times r^3 = 1070.2384$ বা, $r^3 = 255.5$ বা, $r = 6.3454$ সে.মি.

$\therefore$ নিরেট গোলকটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi \times (6.3454)^2 = 505.9748$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

গ) নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ 6.3454 সে.মি.

$\therefore$ নিরেট গোলকের ব্যাস $= 2 \times 6.3454$ সে.মি. $= 12.6908$ সে.মি.

যেহেতু নিরেট গোলকটি ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়, সেহেতু বাক্সটির দৈর্ঘ্য হবে নিরেট গোলকের ব্যাসের সমান। সুতরাং ঘনক আকৃতির বাক্সের দৈর্ঘ্য $= 12.6908$ সে.মি.

$\therefore$ বাক্সটির আয়তন $= (12.6908)^3 = 2043.9346$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

নিরেট গোলকের আয়তন = ফাঁপা গোলকে ব্যবহৃত লোহার আয়তন $= 1070.2384$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ বাক্সটির অনধিকৃত অংশের আয়তন $= (2043.9346 - 1070.2384) = 973.6962$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

অনুশীলনী ১৩

১. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি., প্রস্থ 4 সে.মি. এবং উচ্চতা 3 সে.মি.। এর কর্ণ কত?

ক) $5\sqrt{2}$ সে.মি. খ) 25 সে.মি. গ) $25\sqrt{2}$ সে.মি. ঘ) 50 সে.মি.

২. কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ভিন্ন অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. এবং 3 সে.মি.। ত্রিভুজটিকে বৃহত্তর বাহুর চর্তুদিকে ঘোরালে -

(i) উৎপন্ন ঘনবস্তুটি একটি সমবৃত্তভূমিক কোণক হবে

(ii) ঘনবস্তুটি একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার হবে

(iii) উৎপন্ন ঘনবস্তুটির ভূমির ক্ষেত্রফল হবে 9π বর্গ সে.মি.

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i খ) ii গ) i ও iii ঘ) ii ও iii

নিম্নের তথ্যের আলোকে ৩ ও ৪ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও।

2 সে.মি. ব্যাসের একটি গোলক আকৃতির বল একটি সিলিন্ডার আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়।

৩. সিলিন্ডারটির আয়তন কত?

ক) 2π ঘন সে.মি. খ) 4π ঘন সে.মি. গ) 6π ঘন সে.মি. ঘ) 8π ঘন সে.মি.

৪. সিলিন্ডারটির অনধিকৃত অংশের আয়তন কত?

ক) $\frac{\pi}{3}$ ঘন সে.মি. খ) $\frac{2\pi}{3}$ ঘন সে.মি. গ) $\frac{4\pi}{3}$ ঘন সে.মি. ঘ) $\frac{3\pi}{3}$ ঘন সে.মি.

নিম্নের তথ্যের ভিত্তিতে ৫ ও ৬ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও।

6 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি ধাতব কঠিন গোলককে গলিয়ে 3 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার তৈরি করা হলো।

৫. উৎপন্ন সিলিন্ডারটির উচ্চতা কত?

ক) 4 সে.মি খ) 6 সে.মি. গ) 8 সে.মি. ঘ) 12 সে.মি.

৬. সিলিন্ডারটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক) 24π খ) 42π গ) 72π ঘ) 96π

(ক্যালকুলেটর ব্যবহার করা যাবে। প্রয়োজনে $\pi = 3.1416$ ধরতে হবে।)

৭. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 16 মি., 12 মি. ও 4.5 মি.। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং আয়তন নির্ণয় কর।

৮. ভূমির উপর অবস্থিত 2.5 মি. দৈর্ঘ্য ও 1 মি. প্রস্থ বিশিষ্ট (অভ্যন্তরীণ পরিমাপ) একটি আয়তাকার জলাধারের উচ্চতা 0.4 মিটার হলে, এর আয়তন এবং অভ্যন্তরীণ তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৯. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর মাত্রাগুলো 5 সে.মি., 4 সে.মি. ও 3 সে.মি. হলে, এর কর্ণের সমান ধারবিশিষ্ট ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১০. 70 জন ছাত্রের জন্য এরূপ একটি হোস্টেল নির্মাণ করতে হবে যাতে প্রত্যেক ছাত্রের জন্য 4.25 বর্গমিটার মেঝে ও 13.6 ঘনমিটার শূন্যস্থান থাকে। ঘরটি 34 মিটার লম্বা হলে, এর প্রস্থ ও উচ্চতা কত হবে?

১১. একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের উচ্চতা 8 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 6 সে.মি. হলে, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

১২. একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের উচ্চতা 24 সে.মি. এবং আয়তন 1232 ঘন সে.মি.। এর হেলানো উচ্চতা কত?

১৩. কোনো সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি. এবং 3.5 সে.মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, তার আয়তন নির্ণয় কর।

১৪. 6 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলকের পৃষ্ঠতল ও আয়তন নির্ণয় কর।

১৫. $6, 8, r$ সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট তিনটি কঠিন কাচের বল গলিয়ে 9 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি কঠিন গোলকে পরিণত করা হলো। r এর মান নির্ণয় কর।

১৬. একটি ফাঁপা লোহার গোলকের বাইরের ব্যাস 13 সে.মি. এবং লোহার বেধ 2 সে.মি.। ঐ গোলকে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে একটি নিরেট গোলক তৈরি করা হলো। তার ব্যাস কত হবে?

১৭. 4 সে.মি. ব্যাসার্ধের একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে 5 সে.মি. বহির্ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট ও সমভাবে পুরু একটি ফাঁপা গোলক প্রস্তুত করা হলো। দ্বিতীয় গোলকটি কত পুরু?

১৮. একটি লোহার নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ 6 সে.মি.। এর লোহা থেকে 8 সে.মি. দৈর্ঘ্য ও 6 সে.মি. ব্যাসের কয়টি নিরেট সিলিন্ডার প্রস্তুত করা যাবে?

১৯. $\frac{22}{\pi}$ সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলক আকৃতির বল একটি ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়। বাক্সটির অনধিকৃত অংশের আয়তন নির্ণয় কর।

২০. 13 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলকের কেন্দ্র থেকে 12 সে.মি. দূরবর্তী কোন বিন্দুর মধ্য দিয়ে ব্যাসের উপর লম্ব সমতল গোলকটিকে ছেদ করে। উৎপন্ন তলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২১. একটি ঢাকনাযুক্ত কাঠের বাক্সের বাইরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 1.6 মি. ও 1.2 মি., উচ্চতা 0.8 মি. এবং এর কাঠ 3 সে.মি. পুরু। বাক্সটির ভিতরের তলের ক্ষেত্রফল কত? প্রতি বর্গমিটার 14.44 টাকা হিসাবে বাক্সের ভিতর রং করতে কত খরচ হবে?

২২. 120 মি. দৈর্ঘ্য ও 90 মি. প্রস্থ (বহির্মাপ) বিশিষ্ট আয়তাকার বাগানের চতুর্দিকে 2 মি. উঁচু ও 25 সে.মি. পুরু প্রাচীর নির্মাণ করতে 25 সে.মি. দৈর্ঘ্য, 12.5 সে.মি. প্রস্থ এবং 8 সে.মি. বেধ বিশিষ্ট কতগুলো ইট লাগবে?

২৩. একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 4 : 3 এবং এর আয়তন 2304 ঘন সে.মি.। প্রতি বর্গসেন্টিমিটারে 10 টাকা হিসেবে ঐ বস্তুর তলায় সীসার প্রলেপ দিতে 1920 টাকা খরচ

হলে, ঐ বস্তুর মাত্রাগুলো নির্ণয় কর।

২৪. কোণক আকারের একটি তাঁবুর উচ্চতা 7.5 মিটার। এই তাঁবু দ্বারা 2000 বর্গমিটার জমি ঘিরতে চাইলে কি পরিমাণ ক্যানভাস লাগবে?

২৫. একটি পঞ্চভুজাকার প্রিজমের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 8 সে.মি. এবং অপর তিনটি বাহুর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 10 সে.মি., উচ্চতা 12.5 সে.মি.। প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

২৬. 4 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়্‌ভুজাকার প্রিজমের উচ্চতা 5 সে.মি.। ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন বের কর।

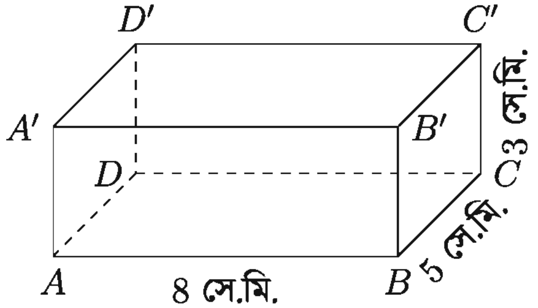
২৭. 6 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট সুষম ষড়্‌ভুজের উপর অবস্থিত একটি পিরামিডের উচ্চতা 10 সে.মি.। ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

২৮. একটি সুষম চতুস্তলকের যেকোনো ধারের দৈর্ঘ্য 8 সে.মি. হলে, ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

২৯. একটি স্থাপনার নিচের অংশ 3 মি. দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট আয়তাকার ঘনবস্তু ও উপরের অংশ সুষম পিরামিড। পিরামিডের ভূমির বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মি. এবং উচ্চতা 3 মি. হলে স্থাপনাটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

৩০. 25 মি. দৈর্ঘ্য ও 18 মি. প্রস্থ বিশিষ্ট ভূমির উপর অবস্থিত দোচালা গুদাম ঘরের দেয়ালের উচ্চতা 5 মি.। প্রতিটি চালার প্রস্থ 14 মি. হলে গুদাম ঘরটির আয়তন নির্ণয় কর।

৩১. ক) নিচের চিত্রের ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



খ) ঘনবস্তুটির কর্ণের সমান ধারবিশিষ্ট একটি ধাতব ঘনককে গলিয়ে 1.8 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট কতগুলো নিরেট গোলক উৎপন্ন করা যাবে তা নিকটতম পূর্ণসংখ্যায় নির্ণয় কর।

৩২. একটি সমবৃত্তভূমিক কোণাকৃতির তাঁবুর উচ্চতা 8 মিটার এবং এর ভূমির ব্যাস 50 মিটার।

ক) তাঁবুটির হেলানো উচ্চতা নির্ণয় কর।

খ) তাঁবুটি স্থাপন করতে কত বর্গমিটার জমির প্রয়োজন হবে? তাঁবুটির ভিতরের শূন্যস্থানের পরিমাণ নির্ণয় কর।

গ) তাঁবুটির প্রতি বর্গমিটার ক্যানভাসের মূল্য 125 টাকা হলে ক্যানভাস বাবদ কত খরচ হবে?

অধ্যায় ১৪

সম্ভাবনা (Probability)

আমরা প্রতিনিয়ত ‘সম্ভাবনা’ শব্দটি ব্যবহার করে থাকি। যেমন এবার এস.এস.সি. পরীক্ষায় যাদবের পাশ করার সম্ভাবনা খুব কম, এশিয়া কাপ ক্রিকেটে বাংলাদেশের জয়ের সম্ভাবনা বেশি, আগামীকাল তাপমাত্রা বৃদ্ধি পাওয়ার সম্ভাবনা বেশি, আজ বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা কম ইত্যাদি। অর্থাৎ কোনো ঘটনা ঘটার ক্ষেত্রে অনিশ্চয়তা থাকলেই কেবল আমরা সম্ভাবনার কথা বলি। আর অনিশ্চয়তার মাত্রার উপরই ঘটনাটা ঘটার সম্ভাবনা কম বা বেশি হবে তা নির্ভর করে। কিন্তু কোনো সাংখ্যিক মান দিতে পারে না। এই অধ্যায়ে আমরা কোনো ঘটনা ঘটার সম্ভাবনার সাংখ্যিক মান নির্ণয়ের বিভিন্ন সূত্র এবং নির্ণয় প্রণালী সম্পর্কে জানবো এবং নিশ্চিত ঘটনা, অসম্ভব ঘটনা ও সম্ভাব্য ঘটনা বর্ণনা করতে পারবো।

এই অধ্যায় শেষে শিক্ষার্থীরা ---

- সম্ভাবনার ধারণা ব্যাখ্যা করতে পারবে।
- দৈনন্দিন বিভিন্ন উদাহরণের সাহায্যে নিশ্চিত ঘটনা, অসম্ভব ও সম্ভাব্য ঘটনার বর্ণনা করতে পারবে।
- একই ঘটনার পুনরাবৃত্তি ঘটলে সম্ভাব্য ফলাফল বর্ণনা করতে পারবে।
- একই ঘটনার পুনরাবৃত্তি ঘটলে সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পারবে।
- সম্ভাবনার সহজ ও বাস্তবভিত্তিক সমস্যার সমাধান করতে পারবে।

সম্ভাবনার সাথে জড়িত কিছু ধারণা

দৈব পরীক্ষা (Random Experiment): যখন কোনো পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফল আগে থেকে জানা থাকে কিন্তু পরীক্ষাটিতে কোনো একটি নির্দিষ্ট চেষ্টায় কি ফলাফল আসবে তা নিশ্চিত করে বলা যায় না, একে দৈব পরীক্ষা বলে। যেমন একটা মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষার সম্ভাব্য ফলাফল কি হবে, তা আমরা আগে থেকেই জানি কিন্তু মুদ্রাটি নিক্ষেপের পূর্বে কোন ফলাফলটি ঘটবে তা আমরা নিশ্চিত করে বলতে পারি না। সুতরাং মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষা একটা দৈব পরীক্ষা।

ঘটনা (Event): কোনো পরীক্ষার ফলাফল বা ফলাফলের সমাবেশকে ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ, একটা ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় 3 পাওয়া একটি ঘটনা। আবার জোড় সংখ্যা পাওয়াও একটি ঘটনা।

সমসম্ভাব্য ঘটনাবলী (Equally Likely Events): যদি কোনো পরীক্ষার ঘটনাগুলো ঘটার সম্ভাবনা

সমান হয় অর্থাৎ একটি অপরটির চেয়ে বেশি বা কম সম্ভাব্য না হয় তবে ঘটনাগুলোকে সমসম্ভাব্য বলে। যেমন একটা নিরপেক্ষ মুদ্রা নিক্ষেপে হেড বা টেল আসার সম্ভাবনা সমান। সুতরাং হেড আসা ও টেল আসা ঘটনা দুইটি সমসম্ভাব্য ঘটনা।

পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনাবলী (Mutually Exclusive Events): কোনো পরীক্ষায় যদি একটা ঘটনা ঘটলে অন্যটা অথবা অন্য ঘটনাগুলো না ঘটতে পারে তবে উক্ত ঘটনাগুলোকে পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা বলে। যেমন, একটা নিরপেক্ষ মুদ্রা নিক্ষেপ করলে হেড আসা বা টেল আসা দুইটি বিচ্ছিন্ন ঘটনা। কেননা হেড আসলে টেল আসতে পারে না। আবার টেল আসলে হেড আসতে পারে না। অর্থাৎ হেড ও টেল একসাথে আসতে পারে না।

অনুকূল ফলাফল (Favourable Outcomes): কোনো পরীক্ষায় একটা ঘটনার স্বপক্ষের ফলাফল হলো ঘটনার অনুকূল ফলাফল। একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে বিজোড় সংখ্যা হওয়ার অনুকূল ফলাফল 3 টি।

নমুনাক্ষেত্র (Sample Space) ও নমুনা বিন্দু (Sample Point): কোনো দৈব পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফল নিয়ে গঠিত সেটকে নমুনাক্ষেত্র বলে। একটা মুদ্রা নিক্ষেপ করলে দুইটি সম্ভাব্য ফলাফল পাওয়া যায়, যথা হেড ও টেল। এখন S দ্বারা এ পরীক্ষণের ফলাফলের সেটকে সূচিত করলে আমরা লিখতে পারি $S = \{H, T\}$। সুতরাং উক্ত পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র, $S = \{H, T\}$। মনে করা যাক দুইটি মুদ্রা একসাথে নিক্ষেপ করা হলো। তাহলে নমুনাক্ষেত্রটি হবে $S = \{HH, HT, TH, TT\}$। নমুনাক্ষেত্রের প্রতিটি উপাদানকে ফলাফলের নমুনা বিন্দু বলে। একটা মুদ্রা একবার নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনাক্ষেত্র $S = \{H, T\}$ এবং এখানে H, T প্রত্যেকেই এক একটা নমুনা বিন্দু।

যুক্তিভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয়

উদাহরণ ১. মনে করি একটা নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করা হলো। 5 আসার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: একটা ছক্কা নিক্ষেপ করলে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো হচ্ছে: $1, 2, 3, 4, 5, 6$। ছক্কাটি নিরপেক্ষ হলে ফলাফলগুলো সমসম্ভাব্য হবে। অর্থাৎ যেকোনো ফলাফল আসার সম্ভাবনা সমান। অতএব যেকোনো একটা ফলাফল আসার সম্ভাবনা ছয়ভাগের একভাগ। সুতরাং 5 আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$। আমরা এটাকে $P(5) = \frac{1}{6}$ এভাবে লিখি।

উদাহরণ ২. একটা নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপে জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: ছক্কা নিক্ষেপে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো হচ্ছে $1, 2, 3, 4, 5, 6$। এদের মধ্যে $2,\ 4,\ 6$ এই 3 টি জোড় সংখ্যা। এই তিনটির যেকোনো একটা আসলে জোড় সংখ্যা হবে অর্থাৎ জোড় সংখ্যার অনুকূল ফলাফল 3 টা। যেহেতু ফলাফলগুলো সমসম্ভাব্য, তাই জোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা হবে $\frac{3}{6}$।

$\therefore P$ (জোড়সংখ্যা) $= \frac{3}{6}$।

তাহলে সম্ভাবনাকে এভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়:

$$\text{কোনো ঘটনার সম্ভাবনা} = \frac{\text{উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}}$$

কোনো পরীক্ষণে কোনো ঘটনা ঘটার অনুকূল ফলাফল সর্বনিম্ন শূন্য এবং সর্বোচ্চ n (সমগ্র সম্ভাব্য ঘটনাবলী) হতে পারে। যখন কোনো ঘটনার অনুকূল ফলাফলের মান শূন্য হয় তখন সম্ভাবনার মান শূন্য হয়। আর যখন অনুকূল ফলাফলের মান n হয়, তখন সম্ভাবনার মান 1 হয়। এ কারণে সম্ভাবনার মান 0 হতে 1 এর মধ্যে থাকে।

দুইটি বিশেষ ধরনের ঘটনা

নিশ্চিত ঘটনা: কোনো পরীক্ষায় যে ঘটনা অবশ্যই ঘটবে একে নিশ্চিত ঘটনা বলে। নিশ্চিত ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার মান 1 হয়। যেমন, আগামীকাল সূর্য পূর্ব দিকে উঠার সম্ভাবনা 1, আজ সূর্য পশ্চিম দিকে অস্ত যাবে এর সম্ভাবনাও 1। রাতের বেলায় সূর্য দেখা যাবে না, এর সম্ভাবনা 1। একটা মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় H অথবা T আসার সম্ভাবনাও 1। একটা ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় জোড় অথবা বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনাও 1। এগুলোর প্রত্যেকেই নিশ্চিত ঘটনা।

অসম্ভব ঘটনা : কোনো পরীক্ষায় যে ঘটনা কখনো ঘটবে না অর্থাৎ ঘটতে পারে না একে অসম্ভব ঘটনা বলে। অসম্ভব ঘটনার সম্ভাবনা সব সময় শূন্য হয়। যেমন আগামীকাল সূর্য পশ্চিম দিক থেকে উঠবে অথবা পূর্বদিকে অস্ত যাবে এর সম্ভাবনা শূন্য। তেমনি রাত্রে সূর্য দেখা যাবে এর সম্ভাবনাও শূন্য। আবার একটা ছক্কা নিক্ষেপে 7 আসার সম্ভাবনাও শূন্য। এখানে প্রত্যেকটি ঘটনাই অসম্ভব ঘটনা।

উদাহরণ ৩. একটা থলেতে 4 টা লাল, 5 টা সাদা ও 6 টা কালো বল আছে। দৈবভাবে একটা বল নেয়া হলো। বলটি ক) লাল, খ) সাদা ও গ) কালো হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: থলেতে মোট বলের সংখ্যা 15 টি। দৈবভাবে একটা বল নেয়া হলে 15 টি বলের যেকোনো একটি আসতে পারে। সুতরাং সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল = 15।

ক) ধরি লাল বল হওয়ার ঘটনা R। থলেতে মোট 4 টি লাল বল আছে। এদের যেকোনো একটি আসলেই লাল বল হবে। সুতরাং লাল বলের অনুকূল ফলাফল = 4।

$$\therefore P(R) = \frac{\text{লাল বলের অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{4}{15}।$$

খ) ধরি সাদা বল হওয়ার ঘটনা W। থলেতে মোট 5 টি সাদা বল আছে। এদের যেকোনো একটি আসলেই সাদা বল হবে। সুতরাং সাদা বলের অনুকূল ফলাফল = 5।

$$\therefore P(W) = \frac{\text{সাদা বলের অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}।$$

গ) ধরি কালো বল হওয়ার ঘটনা B। থলেতে মোট 6 টি কালো বল আছে। এদের যেকোনো একটি আসলেই কালো বল হবে। সুতরাং কালো বলের অনুকূল ফলাফল = 6।

$$\therefore P(B) = \frac{\text{কালো বলের অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}।$$

কাজ:

ক) একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করা হল। নিম্নলিখিত সম্ভাবনাগুলো বের কর।

(i) 4 আসা (ii) বিজোড় সংখ্যা আসা (iii) 4 অথবা 4 এর বেশি সংখ্যা আসা (iv) 5 এর কম সংখ্যা আসা

খ) একটি থলেতে একই ধরনের 6 টি কালো, 5 টি লাল, 8 টি সাদা মার্বেল আছে। থলে হতে একটি মার্বেল দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো। নিম্নলিখিত সম্ভাবনাগুলো বের কর।

নির্বাচিত মার্বেলটি (i) লাল (ii) কালো (iii) সাদা (iv) কালো নয়

তথ্যভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয়

যুক্তিভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয়ে ফলাফলগুলো সমসম্ভাব্য হতে হয়। বাস্তবে সকল ক্ষেত্রে ফলাফলগুলো সমসম্ভাব্য হয় না। তাছাড়া অনেক ক্ষেত্রে সম্ভাবনার যুক্তিভিত্তিক সংজ্ঞার মত কিছু গণনা করা যায় না। যেমন আবহাওয়ার পূর্বাভাসে বলা হচ্ছে আজ বৃষ্টি হবার সম্ভাবনা 30%, বিশ্বকাপ ফুটবলে ব্রাজিলের জয়ী হওয়ার সম্ভাবনা 40%, এশিয়া কাপ ক্রিকেটে বাংলাদেশের জয়ী হওয়ার সম্ভাবনা 60%। এসব সিদ্ধান্ত নেয়া হয় অতীতের পরিসংখ্যান হতে এবং এটাই হচ্ছে তথ্যভিত্তিক সম্ভাবনার ধারণা।

ধরা যাক, একটা মুদ্রা 1000 বার নিক্ষেপ করায় 523 বার হেড পাওয়া গেল। এ ক্ষেত্রে হেডের আপেক্ষিক গণসংখ্যা $\frac{523}{1000} = 0.523$। ধরা যাক মুদ্রাটিকে 2000 বার নিক্ষেপ করাতে 1030 বার হেড আসে। তাহলে 2000 বারের মধ্যে H এর আপেক্ষিক গণসংখ্যা $\frac{1030}{2000} = 0.515$। এখান থেকে বুঝা যায় যে, পরীক্ষাটি ক্রমাগত চালিয়ে গেলে (পরীক্ষাটি যতবেশি বার করা যাবে) আপেক্ষিক গণসংখ্যার মানটি এমন একটি সংখ্যার কাছাকাছি হবে যাকে মুদ্রাটি একবার নিক্ষেপ করলে হেড আসার সম্ভাবনা হবে। একেই তথ্যভিত্তিক সম্ভাবনা বলা হয়।

উদাহরণ ৪. আবহাওয়া দপ্তর থেকে পাওয়া রিপোর্ট অনুযায়ী জুলাই মাসে ঢাকা শহরে 21 দিন বৃষ্টি হয়েছে। তাহলে 8 জুলাই বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: যেহেতু জুলাই মাস 31 দিন এবং জুলাই মাসে 21 দিন বৃষ্টি হয়েছে। তাহলে যেকোনো একদিন বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{21}{31}$। অতএব 8 জুলাই বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{21}{31}$।

উদাহরণ ৫. কোনো একটি নির্দিষ্ট এলাকায় জরীপে দেখা গেল 65 জন প্রথম আলো, 40 জন ভোরের কাগজ, 45 জন জনকণ্ঠ, 52 জন যুগান্তর পত্রিকা পড়ে। এদের মধ্য হতে একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করলে তিনি যুগান্তর পত্রিকা পড়েন এর সম্ভাবনা কত? তিনি প্রথম আলো পড়েন না এর সম্ভাবনাও কত?

সমাধান: এখানে পত্রিকা পড়েন মোট $(65 + 40 + 45 + 52) = 202$ জন।

যুগান্তর পত্রিকা পড়েন 52 জন। সুতরাং, ঐ ব্যক্তির যুগান্তর পত্রিকা পড়ার সম্ভাবনা $\frac{52}{202}$।

প্রথম আলো পত্রিকা পড়েন 65 জন। প্রথম আলো পত্রিকা পড়েন না $(202-65)=137$ জন। সুতরাং, প্রথম আলো পত্রিকা পড়েন না এর সম্ভাবনা = $\frac{137}{202}$

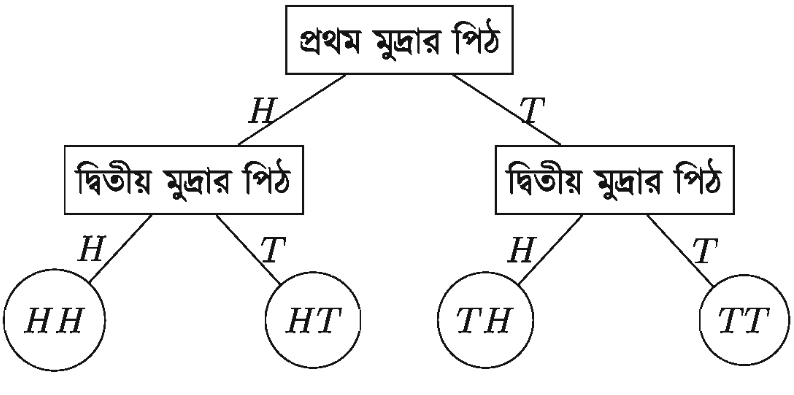
> **কাজ:** একটি জরীপে দেখা গেল কোন বিশ্ববিদ্যালয়ে প্রথম বর্ষে 284 জন ছাত্র অর্থনীতিতে, 106 জন ছাত্র ইতিহাসে, 253 জন ছাত্র সমাজবিজ্ঞানে, 169 জন ছাত্র ইংরেজিতে ভর্তি হয়েছে। এদের একজন ছাত্রকে দৈবভাবে নির্বাচিত করলে নির্বাচিত ছাত্রটি সমাজবিজ্ঞানের হবে না এর সম্ভাবনা কত?

নমুনাক্ষেত্র এবং Probability Tree দ্বারা সম্ভাবনা নির্ণয়

আগেই বলা হয়েছে, কোনো পরীক্ষায় সম্ভাব্য ফলাফলগুলো নিয়ে যে ক্ষেত্র তৈরি হয় তাকে নমুনাক্ষেত্র বলে। অনেক পরীক্ষায় নমুনাক্ষেত্রের আকার বেশ বড় হয়। এসব ক্ষেত্রে নমুনা বিন্দু গণনা করা ও নমুনাক্ষেত্র তৈরি করা সময় সাপেক্ষ এমন কি ভুল হওয়ার সম্ভাবনাও থাকে। সেক্ষেত্রে আমরা probability tree এর সাহায্যে নমুনাক্ষেত্র তৈরি করতে পারি ও বিভিন্ন ঘটনার সম্ভাবনাও বের করতে পারি।

উদাহরণ ৬. মনে করি, দুইটি নিরপেক্ষ মুদ্রা একসাথে একবার নিক্ষেপ করা হলো। নমুনাক্ষেত্রটি তৈরি কর। প্রথম মুদ্রায় H এবং দ্বিতীয় মুদ্রায় T আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

সমাধান: দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষাকে দুই ধাপ হিসেবে বিবেচনা করা যায়। প্রথম ধাপে একটা মুদ্রা নিক্ষেপে 2 টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। দ্বিতীয় ধাপে অপর মুদ্রা নিক্ষেপেও 2 টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। পরীক্ষার মোট ফলাফলকে probability tree এর সাহায্যে নিম্নভাবে দেখানো হয়।

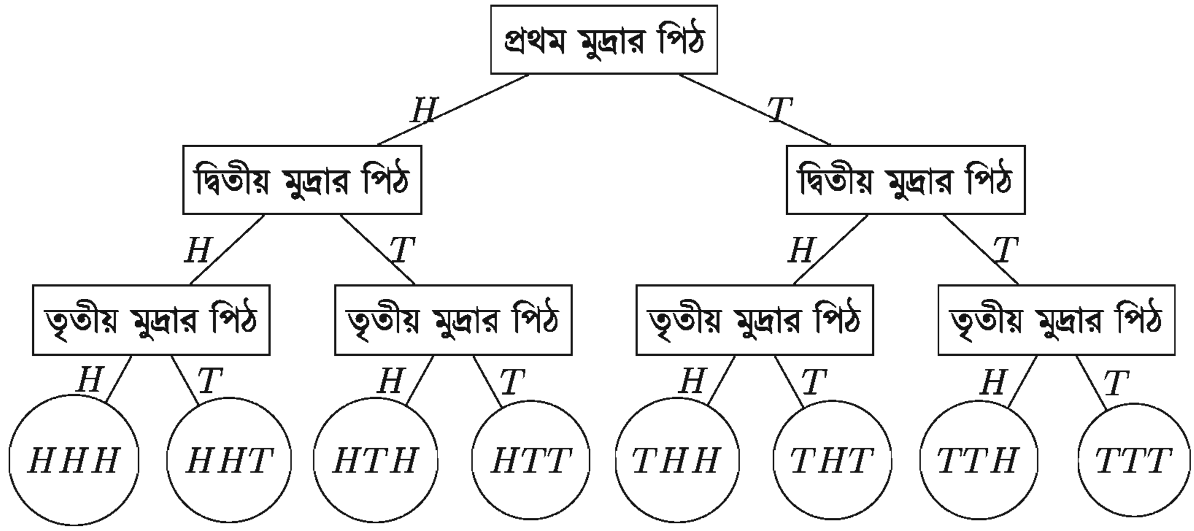


সম্ভাব্য নমুনা বিন্দুগুলো HH, HT, TH, TT। তাহলে নমুনাক্ষেত্রটি হবে $\{HH, HT, TH, TT\}$। এখানে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা 4 এবং প্রতিটি নমুনা বিন্দুর আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{4}$। তাই প্রথম মুদ্রায় H ও দ্বিতীয় মুদ্রায় T আসার সম্ভাবনা হবে, $P(HT)=\frac{1}{4}$।

উদাহরণ ৭. মনে করি, তিনটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হলো। তিনটি নিরপেক্ষ মুদ্রা একসাথে একবার নিক্ষেপ করা হলে, probability tree তৈরি করে নমুনাক্ষেত্রটি দেখাও এবং নিচের ঘটনাগুলোর

সম্ভাবনা নির্ণয় কর। ক) কেবল একটা টেল, খ) তিনটাই হেড, গ) কমপক্ষে একটা টেল পাওয়ার সম্ভাবনা বের কর।

সমাধান: প্রথমে মুদ্রা তিনটিকে তিন ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি এবং প্রতি ধাপে 2 টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। মোট ফলাফলকে probability tree এর সাহায্যে নিম্নভাবে দেখানো যায়:


প্রথম মুদ্রার পিঠ
H
T
দ্বিতীয় মুদ্রার পিঠ
দ্বিতীয় মুদ্রার পিঠ
H
T
H
T
তৃতীয় মুদ্রার পিঠ
তৃতীয় মুদ্রার পিঠ
তৃতীয় মুদ্রার পিঠ
তৃতীয় মুদ্রার পিঠ
H
T
H
T
H
T
H
T
HHH
HHT
HTH
HTT
THH
THT
TTH
TTT

তাহলে নমুনাক্ষেত্রটি হবে: $\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$

এখানে মোট নমুনা বিন্দু 8 টি এবং এদের যেকোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $\frac{1}{8}$।

ক) একটি টেল পাওয়ার অনুকূল ঘটনাগুলো $\{THH, HHT, HTH\}$ = 3 টি।

$\therefore P(1T) = \frac{3}{8}$ (কেননা প্রতিটি নমুনা বিন্দুর ঘটার সম্ভাবনা $\frac{1}{8}$)

খ) তিনটিই হেড (H) পাওয়ার অনুকূল ঘটনা $\{HHH\}$ = 1 টি।

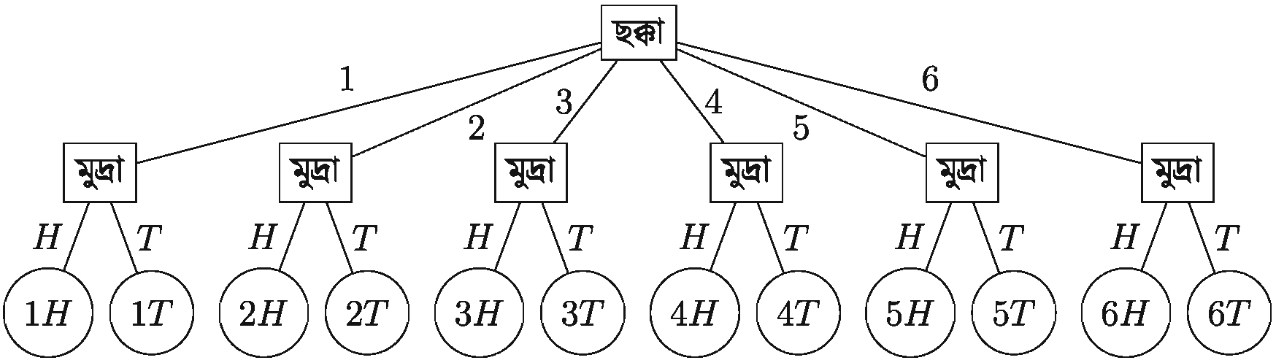
$\therefore P(HHH) = \frac{1}{8}$

গ) কমপক্ষে 1টি টেল (T) পাওয়ার অনুকূল ঘটনাগুলো HHH ছাড়া বাকি সবগুলো অর্থাৎ $\{HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$ = 7 টি।

$\therefore P[\text{কমপক্ষে } 1T] = \frac{7}{8}$

উদাহরণ ৮. একটি নিরপেক্ষ ছক্কা ও একটি মুদ্রা একবার নিক্ষেপ করা হলো। Probability tree তৈরি করে নমুনাক্ষেত্রটি লিখ। ছক্কায় 5 এবং মুদ্রায় H আসার সম্ভাবনা বের কর।

সমাধান: একটি ছক্কা ও একটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষাকে দুই ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি। প্রথম ধাপে ছক্কা নিক্ষেপে 6 টি ফলাফল $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ আসতে পারে। দ্বিতীয় ধাপে মুদ্রা নিক্ষেপে 2 টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। তাই পরীক্ষায় মোট ফলাফলকে probability tree এর সাহায্যে নিম্নভাবে দেখানো যাবে।

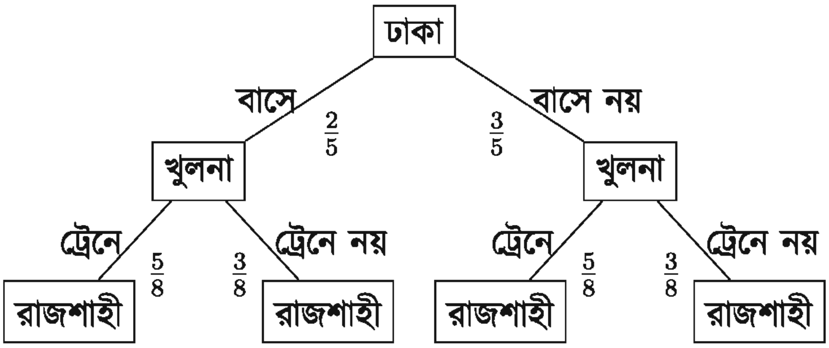

ছক্কা
1
2
3
4
5
6
মুদ্রা
H
T
1H
1T
2H
2T
3H
3T
4H
4T
5H
5T
6H
6T

তাহলে নমুনাক্ষেত্রটি হবে: $\{1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T\}$।

এখানে মোট নমুনা বিন্দু 12 টি। $\therefore$ ছক্কায় 5 এবং মুদ্রায় H আসার সম্ভাবনা $P(5H) = \frac{1}{12}$।

উদাহরণ ৯. একজন লোকের ঢাকা হতে খুলনায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$ এবং খুলনা হতে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{8}$। লোকটি খুলনায় বাসে এবং রাজশাহী ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা কত? Probability tree ব্যবহার করে দেখাও।

সমাধান: সম্ভাবনার মাধ্যমে probability tree হবে


ঢাকা
বাসে
$\frac{2}{5}$
$\frac{3}{5}$
বাসে নয়
খুলনা
খুলনা
ট্রেনে
$\frac{5}{8}$
$\frac{3}{8}$
ট্রেনে নয়
ট্রেনে
$\frac{5}{8}$
$\frac{3}{8}$
ট্রেনে নয়
রাজশাহী
রাজশাহী
রাজশাহী
রাজশাহী

সুতরাং লোকটির খুলনায় বাসে এবং রাজশাহীতে ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা

$$P[\text{খুলনা বাস, রাজশাহী ট্রেনে নয়}] = \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$$

কাজ:

ক) Probability tree এর সাহায্যে তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপে সকল সম্ভাব্য ফলাফল লিখ এবং নমুনাক্ষেত্রটি তৈরি কর। এখান হতে (i) মুদ্রা 3 টিতে একই ফলাফল (ii) কমপক্ষে $2T$ (iii) বড়জোড় $2T$ আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

খ) 1 টি ছক্কা ও 2 টি মুদ্রা নিক্ষেপ ঘটনার probability tree তৈরি কর।

অনুশীলনী ১৪

১. একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে 3 উঠার সম্ভাবনা কোনটি?

ক) $\frac{1}{6}$ খ) $\frac{1}{3}$ গ) $\frac{2}{3}$ ঘ) $\frac{1}{2}$

নিচের তথ্য থেকে ২ ও ৩ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি থলিতে নীল বল 12 টি , সাদা বল 16 টি এবং কালো বল 20 টি আছে। দৈবভাবে একটা বল নেওয়া হলো।

২. বলটি নীল হওয়ার সম্ভাবনা কত?

ক) $\frac{1}{16}$ খ) $\frac{1}{12}$ গ) $\frac{1}{8}$ ঘ) $\frac{1}{4}$

৩. বলটি সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা কত?

ক) $\frac{1}{3}$ খ) $\frac{2}{3}$ গ) $\frac{1}{16}$ ঘ) $\frac{1}{48}$

নিম্নের তথ্য থেকে ৪ ও ৫ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি মুদ্রাকে তিনবার নিক্ষেপ করা হল।

৪. T অপেক্ষা অধিক বার H আসার সম্ভাবনা কত?

ক) $\frac{1}{6}$ খ) $\frac{1}{3}$ গ) $\frac{1}{2}$ ঘ) $\frac{2}{3}$

৫. শূন্য বার T আসার সম্ভাবনা কত?

ক) 0 খ) $\frac{1}{2}$ গ) 1 ঘ) $\frac{1}{8}$

৬. দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপের ক্ষেত্রে --

(i) বড়জোড় একটি H পাওয়ার সম্ভাবনা = 0.75

(ii) কমপক্ষে একটি H পাওয়ার সম্ভাবনা = 0.75

(iii) HH একটি নমুনা বিন্দু।

নিচের কোনটি সঠিক?

ক) i, ii খ) i, iii গ) ii, iii ঘ) i, ii, iii

৭. 30 টি টিকেটে 1 থেকে 30 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেয়া আছে। টিকেটগুলো ভালভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে নেয়া হলো। টিকেটটির ক্রমিক নম্বর ক) জোড় সংখ্যা খ) 4 দ্বারা বিভাজ্য গ) 4 এর চেয়ে ছোট ঘ) 22 এর চেয়ে বড় হওয়ার সম্ভাবনাগুলো নির্ণয় কর।

৮. কোনো একটি লটারিতে 570 টি টিকেট বিক্রি হয়েছে। রহিম 15 টি টিকেট কিনেছে। টিকেটগুলো ভালভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে প্রথম পুরস্কারের জন্য তোলা হলো। রহিমের প্রথম পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

৯. একটা ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে জোড় সংখ্যা অথবা তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা উঠার সম্ভাবনা কত?

১০. কোনো একটি স্বাস্থ্য কেন্দ্রের রিপোর্ট অনুযায়ী কম ওজনের 155 টি শিশু, স্বাভাবিক ওজনের 386 টি শিশু এবং বেশি ওজনের 98 টি শিশু জন্ম নেয়। এখান হতে একটি শিশু দৈবভাবে নির্বাচন করলে নির্বাচিত শিশুটি বেশি ওজনের হবে এর সম্ভাবনা কত?

১১. কোনো একটি ফ্যাক্টরীতে নিয়োগকৃত লোকদের কাজের ধরন অনুযায়ী নিম্নভাবে শ্রেণিকৃত করা যায়:

শ্রেণিকরণ	সংখ্যা
ব্যবস্থাপনায়	157
পরিদর্শক হিসেবে	52
উৎপাদন কাজে	1473
অফিসিয়াল কাজে	215

একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করলে লোকটি --

ক) ব্যবস্থাপনায় নিয়োজিত এর সম্ভাবনা কত?

খ) ব্যবস্থাপনায় অথবা উৎপাদন কাজে নিয়োজিত এর সম্ভাবনা কত?

গ) উৎপাদন কাজে নিয়োজিত নয় এর সম্ভাবনা কত?

১২. দুই হাজার লাইসেন্স প্রাপ্ত ড্রাইভার এক বছরে নিম্নলিখিত সংখ্যক বার ট্রাফিক আইন ভঙ্গ করে।

ট্রাফিক আইন ভঙ্গের সংখ্যা	ড্রাইভারের সংখ্যা
0	1910
1	46
2	18
3	12
4	9
4 এর অধিক	5

ক) একজন ড্রাইভারকে দৈবভাবে নির্বাচন করলে ড্রাইভারটির 1 বার আইন ভঙ্গ করার সম্ভাবনা কত? খ) ড্রাইভারটির 4 এর অধিক বার আইন ভঙ্গ করার সম্ভাবনা কত?

১৩. 1 টি মুদ্রা ও 1 টি ছক্কা নিক্ষেপ ঘটনার probability tree তৈরি কর।

১৪. Probability tree এর সাহায্যে নিচের ছকটি পূরণ কর:

মুদ্রা নিক্ষেপ	সকল সম্ভাব্য ফলাফল	সম্ভাবনা
একবার মুদ্রা নিক্ষেপ		$P(T) =$
দুইবার মুদ্রা নিক্ষেপ		$P(1H) =$ $P(HT) =$
তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপ		$P(HHT) =$ $P(2H) =$

১৫. কোনো একজন লোকের ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{9}$ এবং রাজশাহী হতে দিনাজপুর বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{7}$। Probability tree ব্যবহার করে --

ক) লোকটি ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে নয় এবং রাজশাহী হতে দিনাজপুর বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা কত বের কর।

খ) লোকটি রাজশাহী ট্রেনে কিন্তু দিনাজপুর বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা বের কর।

১৬. একজন লোকের ঢাকা হতে চট্টগ্রাম ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{9}$, বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{7}$, প্লেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{9}$। লোকটির চট্টগ্রাম হতে কক্সবাজার বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$ এবং গাড়িতে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{7}$। Probability tree ব্যবহার করে লোকটির চট্টগ্রাম ট্রেনে এবং কক্সবাজার বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা বের কর।

১৭. একটি দুই টাকার মুদ্রা চার বার নিক্ষেপ করা হলো। (এর শাপলার পিঠকে L এবং প্রাথমিক শিক্ষার শিশুর পিঠকে C বিবেচনা কর)

ক) যদি মুদ্রাটিকে চারবারের পরিবর্তে দুইবার নিক্ষেপ করা হয় তবে একটি L আসার সম্ভাবনা এবং একটি C না আসার সম্ভাবনা কত?

খ) সম্ভাব্য ঘটনার Probability tree অঙ্কন কর এবং নমুনাক্ষেত্রটি লিখ।

গ) দেখাও যে, মুদ্রাটি n সংখ্যক বার নিক্ষেপ করলে সংঘটিত ঘটনা সংখ্যা 2^n হয়।

১৮. একটি ঝুড়িতে 8 টি লাল, 10 টি সাদা ও 7 টি কালো মার্বেল আছে। দৈবভাবে একটি মার্বেল নেয়া হল।

ক) সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল নির্ণয় কর।

খ) মার্বেলটি (১) লাল হওয়ার সম্ভাবনা এবং (২) সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

গ) যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর চারটি মার্বেল তুলে নেয়া হয় তবে সবগুলো মার্বেল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

অনুশীলনীর উত্তর

অনুশীলনী ১.১

৫. ক) $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
খ) $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
গ) $C = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
ঘ) $D = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$

৬. ক) $x = 8$ খ) 56 গ) 24

৭. 0, 4 ৮. 0, 3

১৬. খ) A ১৭. 3

২১. ক) $2 < x < 3$ খ) $x < 1$ অথবা, $x > 5$ গ) $R \setminus \{3 \leq x \leq 5\}$

২২. ক) $3 \leq x \leq 4$ খ) $4 < x < 6$
গ) $1 < x < 3$ ঘ) $x \leq 1,\ x \geq 6,\ x < 10$

২৩. ক) $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ খ) $A \cup B = \{6\}$

২৪. ক) $A \cap B = \{0, 2\}$ খ) $A \cap B = \{b, c\}$

২৫. ক) 10 খ) 50

অনুশীলনী ১.২

৮. ক) (i) ডোম $S = \{1, 2, 3, 4\}$, রেঞ্জ $S = \{5, 10, 15, 20\}$,
$S^{-1} = \{(5, 1), (10, 2), (15, 3), (20, 4)\}$

(ii) S ও S^{-1} প্রত্যেকে ফাংশন

(iii) এক-এক ফাংশন

খ) (i) ডোম $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, রেঞ্জ $S = \{-1, 0, 3, 8\}$,
$S^{-1} = \{(8, -3), (3, -2), (0, -1), (-1, 0), (0, 1), (3, 2), (8, 3)\}$

(ii) S ফাংশন, S^{-1} ফাংশন নয়, কেননা $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(-3, 8)$, $(3, 8)$, $(-2, 3)$, $(2, 3)$ প্রতিবিম্ব ভিন্ন নয়

(iii) এক-এক ফাংশন নয়

গ) (i) ডোম $S = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\right\}$, রেঞ্জ $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,

$$S^{-1} = \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right), (1,1), (-1,1), \left(2, \frac{5}{2}\right), \left(-2, \frac{5}{2}\right)\right\}$$

(ii) S ফাংশন নয় কেননা $(1,1)$ এবং $(1,-1)$ প্রতিবিম্ব ভিন্ন, S^{-1} ফাংশন

(iii) এক-এক ফাংশন নয়

ঘ) (i) ডোম $S = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$, রেঞ্জ $S = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$, $S^{-1} = S$

(ii) S, S^{-1} উভয়ই ফাংশন

(iii) এক-এক ফাংশন

ঙ) (i) ডোম $S = \{2\}$, রেঞ্জ $S = \{1, 2, 3\}$, $S^{-1} = \{(1,2), (2,2), (3,2)\}$

(ii) S ফাংশন নয়, S^{-1} ফাংশন

(iii) এক-এক ফাংশন নয়

৯. ক) $0, 2, 3$ খ) a গ) 26 ঘ) $1 + y^2$

১০. ক) ডোম $F = R$, রেঞ্জ $F = R$ গ) $\sqrt[3]{x}$

অনুশীলনী ২

৭. ক) $(x+1)^2(x+2)(x+3)$

খ) $(2a-1)(a+1)(a+2)(2a+1)$

গ) $(x+1)(x^2+x+1)$

ঘ) $(x+y+z)(xy+yz+zx)$

ঙ) $-(x-y)(y-z)(z-x)$

চ) $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$

ছ) $(3x+4y-2)(5x-6y+3)$

জ) $(3x+4y-2z)(5x-6y+3z)$

১০. ক) 1 খ) 0 গ) $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ ঘ) $\dfrac{1}{x-1}$

১১. ক) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x+2}$ খ) $\dfrac{6}{x-4} - \dfrac{5}{x-3}$

গ) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{2}{x+3}$ ঘ) $\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{7x-27}{x^2+4} - \dfrac{2}{x+1}\right)$

ঙ) $\dfrac{1}{25(2x+1)} + \dfrac{12}{25(x+3)} - \dfrac{9}{5(x+3)^2}$

অনুশীলনী ৫.১

১. $-3, -\frac{3}{2}$

২. $-1+\frac{\sqrt{10}}{2}, -1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

৩. $2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$

৪. $\frac{1}{4}(5-\sqrt{33}), \frac{1}{4}(5+\sqrt{33})$

৫. $\frac{1}{6}(-7-\sqrt{37}), \frac{1}{6}(-7+\sqrt{37})$

৬. $\frac{1}{6}(9-\sqrt{105}), \frac{1}{6}(9+\sqrt{105})$

৭. $4, 4$

৮. $\frac{1}{4}(-7-\sqrt{57}), \frac{1}{4}(-7+\sqrt{57})$

৯. $\frac{1}{3}, 2$

অনুশীলনী ৫.২

১. 13

২. $\frac{6}{5}$

৩. 9

৪. 5

৫. 5

৬. $\frac{9}{2}, -\frac{9}{2}$

৭. $1, 5$

৮. 18

৯. $\frac{25}{7}, -\frac{1}{7}$

১০. $-\frac{3}{2}, -\frac{9}{11}$

অনুশীলনী ৫.৩

১. 2

২. $\frac{7}{3}$

৩. 6

৪. 5

৫. 2

৬. $\frac{5}{2}$

৭. 3

৮. 0

৯. $0, 2$

১০. $-1, 0$

১১. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

১২. $2, 3$

অনুশীলনী ৫.৪

১. $(2,3)$ $(\frac{15}{2}, \frac{16}{9}\ )$

২. $(3,4)$, $\left(-6, \frac{5}{8}\right)$

৩. $(0,0)$, $(13,13)$, $(3,-2)$, $(-2,3)$

৪. $(0,0)$, $(5,5)$, $(2,-1)$, $(-1,2)$

৫. $\left(\frac{1}{5}, 5\right)$, $\left(\frac{4}{5}, 20\right)$

৬. $\left(3, -\frac{5}{3}\right)$, $\left(\frac{16}{9}, -\frac{3}{4}\right)$

৭. $(1,2)$, $(-1,-2)$

৮. $(7,5)$, $(-7,-5)$, $(\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$

৯. $(3,4)$, $(4,3)$, $(-3,-4)$, $(-4,-3)$

১০. $(2,1)$, $(2,-1)$, $(-2,1)$, $(-2,-1)$

১১. $(1,-2)$, $(2,-1)$, $(-1,2)$, $(-2,1)$

১২. $(1,3)$, $(-1,-3)$, $\left(\frac{13}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right)$, $\left(-\frac{13}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}\right)$

অনুশীলনী ৫.৫

১. 16 মিটার, 15 মিটার

২. 13, 9

৩. দৈর্ঘ্য 8 মিটার, প্রস্থ 6 মিটার

৪. 19

৫. (দৈর্ঘ্য, প্রস্থ) $= (6,4)$ মিটার অথবা $(16, 1\frac{1}{2})$ মিটার

৬. দৈর্ঘ্য 25 মিটার, প্রস্থ 24 মিটার

৭. দৈর্ঘ্য 8 মিটার, প্রস্থ 6 মিটার

৮. 36

৯. $8\sqrt{3}$ মিটার

১০. দৈর্ঘ্য 20 মিটার, প্রস্থ 15 মিটার

১১. 98 বর্গ মিটার

অনুশীলনী ৫.৬

(x,y) যথাক্রমে:

১. $(2,3)$

২. $(2,1)$, $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

৩. $(4,0)$

৪. $(1,2)$

৫. $(3,3)$

৬. $(2,\pm 2)$, $\left(-2, \pm\frac{1}{2}\right)$

৭. $(2,\pm 2)$, $\left(-2, \pm\frac{1}{2}\right)$

৮. $(1,2)$, $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

৯. $(2,\pm 2)$, $\left(-2, \pm\frac{1}{2}\right)$

অনুশীলনী ৫.৭

১৩. অসম্ভব কারণ উভয় সংখ্যা 5 এর গুণিতক হবে।

১৪. $x(x+1) = 10n+6$ যেখানে n, x পূর্ণসংখ্যা x এর শেষ অংক তাহলে সংখ্যাদ্বয়ের শেষ অংক হয় $2, 3$ অথবা $7, 8$ হবে । কিন্তু এরকম সংখ্যা কখনো পূর্ণবর্গ হয় না।

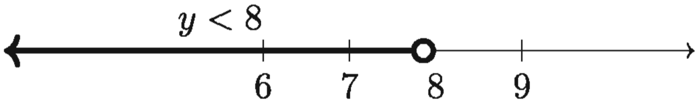
১৫. 11 বার

১৬. 22 বার

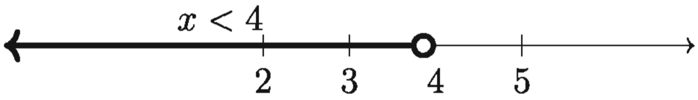
১৭. 143 বার

অনুশীলনী ৬.১

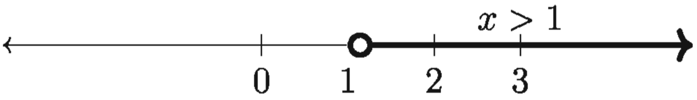
১.



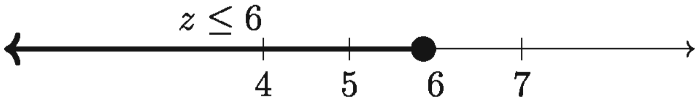
২.



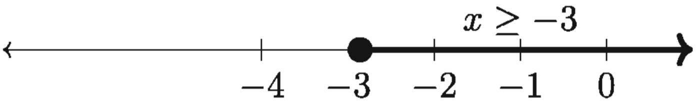
৩.



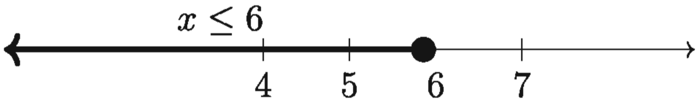
৪.



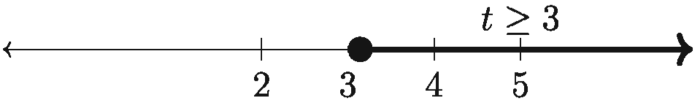
৫.


$x \geq -3$
−4
−3
−2
−1
0

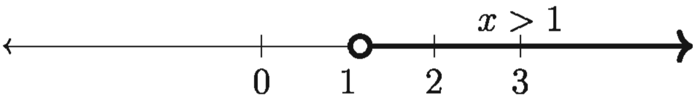
৬.



৭.



৮.



অনুশীলনী ৬.২

১. $3x + \dfrac{x+2}{2} < 29,\ 0 < x < 8$

২. $4x + (x-3) \leq 40,\ 0 < x \leq \dfrac{43}{5}$

৩. $70x + 20x < 500,\ 0 < x \leq 5$

৪. $\dfrac{x + x + 120}{9} \leq 100,\ 0 < x \leq 390$

৫. $5x < 40,\ 5 < x < 8$

৬. পিতার বয়স ≤ 42 বছর

৭. জেনির বর্তমান বয়স x, $14 < x < 17$

৮. সময় t সেকেন্ড হলে $t \geq 50$

৯. উড্ডয়নের সময় t ঘন্টা হলে $t \geq 3\dfrac{5}{8}$

১০. উড্ডয়নের সময় t ঘন্টা হলে $t \geq 2\dfrac{9}{10}$

১১. সংখ্যাটি x হলে $0 < x < 5$

অনুশীলনী ৬.৩

১২. রাবার, কলম ও খাতার মূল্য যথাক্রমে 19, 26 ও 55 টাকা

১৩. 8

১৪. $72°, 36°$

১৫. দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের একটি $x = 1$ থেকে 7 মিটার, অপরটি $8 - x$ মিটার

১৬. সংকেত: এরকম ত্রিভুজ আঁকা যেতে পারে যার জন্য $a < c$, $b < c$, $a + b < c + 1$ এবং a ও b এর মান যত খুশি বড় করা যেতে পারে

১৭. সজীব আগে পৌছবে

অনুশীলনী ৭

৯. ক) $20, 30, 2r$ খ) $5, \dfrac{15}{2}, \dfrac{r}{2}$ গ) $\dfrac{1}{110}, \dfrac{1}{240}, \dfrac{1}{r(r+1)}$ ঘ) $1, 0, 1$ (r জোড় হলে) এবং 0 (r বিজোড় হলে) ঙ) $\dfrac{5}{3^9}, \dfrac{5}{3^{14}}, \dfrac{5}{3^{r-1}}$ চ) $0, 1, \dfrac{1-(-1)^{3r}}{2}$

১০. ক) $n > 10^5$ খ) $n < 10^5$ গ) 0

১১. ক) 2 খ) $\dfrac{1}{7}$ গ) $\dfrac{32}{3}$ ঘ) সমষ্টি নেই ঙ) $\dfrac{1}{3}$

১২. ক) $\dfrac{70}{81}(10^n - 1) - \dfrac{7n}{9}$ খ) $\dfrac{50}{81}(10^n - 1) - \dfrac{5n}{9}$

১৩. শর্ত $x < -2$ অথবা $x > 0$; সমষ্টি $= \frac{1}{x}$

১৪. ক) $\frac{3}{11}$ খ) $2\frac{305}{999}$ গ) $\frac{41}{3330}$ ঘ) $3\frac{403}{9990}$

অনুশীলনী ৮.১

১. ক) (i) 1.3177 রেডিয়ান (প্রায়) (ii) 0.9759 রেডিয়ান (প্রায়) (iii) 0.5824 রেডিয়ান (প্রায়)

খ) (i) $110°46'9.23''$ (ii) $75°29'54.5''$ (iii) $55°54'53.35''$

৩. 12.7549 মি. (প্রায়) ৪. 57 কিমি/ঘণ্টা (প্রায়) ৫. $\frac{\pi}{5}$ রেডিয়ান, $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান

৬. $\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$ ৭. 562 কিমি (প্রায়) ৮. $1,135.3$ কিমি (প্রায়)

৯. 4.78 মি./সে. (প্রায়) ১০. 1 কিমি (প্রায়) ১১. 1.833 রেডিয়ান (প্রায়)

১২. 114.59 মিটার (প্রায়) ১৩. 1745 মি.(প্রায়) বা 1.75 কিমি (প্রায়)

অনুশীলনী ৮.২

১. ক) $\frac{1}{\sqrt{6}}$ খ) 2

২. $\tan\theta = \frac{3}{4}, \sin\theta = -\frac{3}{5}$ ৩. $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \tan A = -2$

৪. $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan A = \sqrt{3}$ ৫. $\sin A = -\frac{5}{13}, \cos A = \frac{12}{13}$

৯. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

১২. ক) $\frac{27}{4}$ খ) $\frac{17}{12}$ গ) $\frac{5}{8}$ ঘ) $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

১৩. 2

অনুশীলনী ৮.৩

৭. ক) 0 খ) 0 গ) অসংজ্ঞায়িত ঘ) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

ঙ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ চ) অসংজ্ঞায়িত ছ) $-\frac{1}{2}$ জ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

৯. ক) 0 খ) 1 গ) 2 ঘ) 2 ঙ) 2

১১. ক) $\frac{11\pi}{6}$ খ) $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ গ) $\frac{4\pi}{3}$ ঘ) $\frac{7\pi}{4}$

১২. ক) $\frac{\pi}{6}$ খ) $\frac{\pi}{3}$ গ) $\frac{\pi}{6}$ ঘ) $\frac{\pi}{6}$ বা $\frac{\pi}{3}$ ঙ) $\frac{\pi}{3}$

১৩. ক) $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ খ) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ গ) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$
ঘ) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ ঙ) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ চ) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$
ছ) $0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$

১৬. $\frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$

অনুশীলনী ৯.১

৫. ক) $\frac{a^2-b^2}{ab}$ খ) $\frac{\sqrt{a}}{b}$ গ) x
ঘ) 1 ঙ) 1 চ) $(\frac{a}{b})^{a+b}$

৮. ক) 0 খ) 0 গ) $\frac{3}{2}$

৯. ক) $x = 0$ খ) $x = 1,\ y = 1$ গ) $x = -2,\ y = -2$
ঘ) $x = -1,\ y = 1$

অনুশীলনী ৯.২

৯. ক) $x = \ln(1-y)$ খ) $x = 10^y$
গ) $x = \pm\sqrt{y}$

১০. $D_f = (2, \infty),\ R_f = R$

১১. $D_f = (-1, 1),\ R_f = R$

১২. ক) $D_f = [-5, 5],\ R_f = [0, 5]$ খ) $D_f = [-2, 2],\ R_f = [0, 4]$
গ) $D_f = R,\ R_f = \{-1, 0, 1\}$

অনুশীলনী ১০.১

১. $1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$

ক) $1-5y+10y^2-10y^3+5y^4-y^5$

খ) $1+10x+40x^2+80x^3+80x^4+32x^5$

২. ক) $1+24x+240x^2+1280x^3+\cdots$

খ) $1-21x+189x^2-945x^3+\cdots$

৩. $1+8x^2+28x^4+56x^6+\cdots$ এবং 1.082856

৪. ক) $1-10x+40x^2-\cdots$

খ) $1+27x+324x^2+\cdots$

৫. ক) $1-14x^2+84x^4-280x^6+\cdots$

খ) $1+\frac{8}{x}+\frac{24}{x^2}+\frac{32}{x^3}+\cdots$

গ) $1-\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{21}{4}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{35}{8}\cdot\frac{1}{x^3}+\cdots$

৬. ক) $1-6x+15x^2-20x^3+\cdots$

খ) $1+12x+60x^2+160x^3+\cdots$

অনুশীলনী ১০.২

৮. ক) $32+80x^2+80x^4+40x^6+10x^8+x^{10}$

খ) $64-\frac{96}{x}+\frac{60}{x^2}-\frac{20}{x^3}+\frac{15}{4x^4}-\frac{3}{8x^5}+\frac{1}{64x^6}$

৯. ক) $64+576x+2160x^2+4320x^3+\cdots$

খ) $1024-\frac{640}{x}+\frac{160}{x^2}-\frac{20}{x^3}+\cdots$

১০. $p=2, r=64, s=60$

১১. 7

১২. $64+48x+15x^2+\frac{5}{2}x^3+\cdots$, 63.5215

১৩. 31.2080

১৪. $n=8$, পদসংখ্যা 9 ও মধ্যপদ $\frac{35}{128}$

১৫. ক) $x=\pm 6$ খ) $k=2$

১৯. 101^{50} বড়

অনুশীলনী ১১.১

১. ক) $\sqrt{13}$ একক   খ) $4\sqrt{2}$ একক   গ) $|a-b|\sqrt{2}$ একক
   ঘ) 1 একক   ঙ) $\sqrt{13}$ একক

৫. $k=-5, 5$

৬. 16.971 (প্রায়)

৯. B নিকটবর্তী, A দূরবর্তী

১১. $\frac{3}{2}\sqrt{13}$

অনুশীলনী ১১.২

১. ক) 7 একক, $4\sqrt{2}$ একক, 5 একক, $12+4\sqrt{2}$ একক
   খ) 14 বর্গ একক

২. ক) 6 বর্গ একক   খ) 24 বর্গ একক

৩. $\sqrt{58}$ একক, $\sqrt{10}$ একক, 11.972 বর্গ একক

৪. $2a^2$ বর্গ একক

৫. 10 একক, 10 একক, 40 বর্গ একক

৬. $a=5$ হলে $\frac{119}{2}$ বর্গ একক, $a=15$ হলে $\frac{169}{2}$ বর্গ একক

৭. $a=2, 5\frac{1}{3}$
   $a=2$ হলে, ABC ত্রিভুজটি সমকোণী, AC অতিভুজ এবং $\angle BAC$ সমকোণ

৮. ক) 21 বর্গ একক   খ) 24 বর্গ একক   গ) 15 বর্গ একক

১০. $p=\frac{59}{5}$

অনুশীলনী ১১.৩

১. ক) -1 খ) $\frac{3}{2}$ গ) 0 ঘ) 2

২. 5 ৪. $1, \frac{1}{2}$ ৫. $1, 2$

অনুশীলনী ১১.৪

১০. $y = 2x - 5$

১১. ক) $y = -x + 6$ খ) $y = x - 3$ গ) $y = 3x - 3a$

১২. ক) $y = 3x + 5$ খ) $y = 3x - 5$ গ) $y = -3x + 5$
ঘ) $y = -3x - 5$

১৩. ক) $(1, 0), (0, -3)$ খ) $(-\frac{6}{5}, 0), (0, 3)$ গ) $(\frac{4}{3}, 0), (0, -2)$

১৪. $y = k(x - k),\ k = 2, 3$

১৫. $y = \frac{1}{k}(x + k^2),\ k = -1, 2$

১৬. $k = \frac{11}{2}$

১৭. ক) $y = 3x + 9$ এবং $y = -2x + 4$ খ) 15 বর্গ একক

অনুশীলনী ১৩

৭. 636 বর্গ মি., 20.5 মি., 864 ঘন মি.
৮. 1 ঘন মি., 7.8 বর্গ মি.
৯. 300 বর্গ সে.মি.
১০. 8.75 মি., 3.2 মি.
১১. 301.6 বর্গ সে.মি., 301.6 ঘন সে.মি.
১২. 25 সে.মি.
১৩. 64.14 ঘন সে.মি.
১৪. 452.39 বর্গ সে.মি., 904.8 ঘন সে.মি.
১৫. 1 সে.মি.
১৬. 11.37 সে.মি.
১৭. 1.06 সে.মি.
১৮. 4 টি
১৯. 1308.82 ঘন সে.মি.
২০. 78.54 বর্গ সে.মি.
২১. 7.48 বর্গ মি., 107.98 টাকা
২২. 83800 টি
২৩. 16 সে.মি., 12 সে.মি., 12 সে.মি.
২৪. 2086.49 বর্গ মি.
২৫. 798 বর্গ সে.মি., 1550 ঘন সে.মি.
২৬. 203.14 বর্গ সে.মি., 207.85 ঘন সে.মি.
২৭. 296.38 বর্গ সে.মি. 311.77 ঘন সে.মি.
২৮. 110.85 বর্গ সে.মি., 60.34 ঘন সে.মি.
২৯. 40.65 বর্গ সে.মি., 16 ঘন সে.মি.
৩০. 4662.86 ঘন সে.মি.

অনুশীলনী ১৪

৭. ক) $\frac{1}{2}$ খ) $\frac{7}{30}$ গ) $\frac{3}{30}$ ঘ) $\frac{4}{15}$

৮. $\frac{1}{38}$

৯. $\frac{2}{3}$

১০. $\frac{98}{639}$

১১. ক) $\frac{157}{1897}$ খ) $\frac{1630}{1897}$ গ) $\frac{424}{1897}$

১২. ক) $\frac{23}{1000}$ খ) $\frac{1}{400}$

১৫. ক) $\frac{8}{63}$ খ) $\frac{25}{63}$

১৬. $\frac{4}{45}$

স্মরণীয় কয়েকজন গণিতবিদ

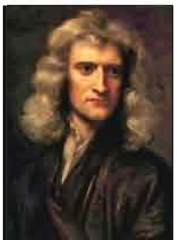
প্যারি ডি ফার্মা

প্যারি ডি ফার্মা (1601-1665) একজন ম্যাজিস্ট্রেট ছিলেন। তার অসাধারণ দ্রুত গণিতের উদ্ভাবনী শক্তি তাকে উচ্চতর গণিত ও এনালাইটিক্যাল জ্যামিতিতে গভীরভাবে অবদান রাখতে সাহায্য করে। তিনি যখন বলতেন, তার কাছে গণিতের কোনো সমস্যার প্রমাণ আছে, তার কাছে সত্যি একটি নির্ভুল প্রমাণ থাকতো। তিনি ব্লেস প্যাসকেলের সাথে প্রোবাবিলিটি থিউরির ভিত্তি স্থাপন করেন। তার সংজ্ঞায়িত Fermat's Last Theorem প্রমাণ করতে প্রায় সাড়ে তিনশত বছর লেগে যায় এবং নাম্বার থিউরির অনেক উন্নয়ন হয়।

ব্লেস প্যাসকেল

ব্লেস প্যাসকেল (1623-1662) 1645 সালে প্রথম ক্যালকুলেটিং মেশিন উদ্ভাবন করেন। তার নাম ব্যবহার করা হলেও তিনি আসলে নাম্বারের ট্রায়াঙ্গুলার অ্যারে (Triangular Array of Numbers) উদ্ভাবন করেননি। কিন্তু তিনি ট্রায়াঙ্গুলার অ্যারে এবং বাইনোমিয়াল এক্সপানশনের মধ্যে সম্পর্ক দেখেছিলেন। তিনি অ্যারে এবং কম্বিনেশনাল প্রবলেমের মধ্যে যোগাযোগটা বের করেছিলেন।

আইজ্যাক নিউটন



আইজ্যাক নিউটনকে (1642-1727) ইংরেজি বিশ্বে সবচেয়ে বড় বিজ্ঞানী-গণিতবিদ হিসাবে দেখা হয়। তিনি ছোটবেলায় পড়ালেখায় মনোযোগী ছিলেন না এবং ক্লাসে তার অবস্থান ছিল সবার নিচে। তাঁর প্রধান অবদানগুলো হলো - Universal Law of Gravitation, The Three Laws of Dynamics, Differential & Integral Calculus, The Binomial Theorem, The discovery of the colors of white light।

গটফ্রায়েড উইলহেম ভন লিবনিজ

গটফ্রায়েড উইলহেম ভন লিবনিজ (1646-1716) ছিলেন জার্মানীর প্রতিভাবান ব্যক্তি যিনি একইসাথে আইন, দর্শন, ধর্ম, সাহিত্য, মেটা ফিজিক্স এবং গণিতে পণ্ডিত ছিলেন। তিনি নিজে নিজেই ক্যালকুলাস আবিস্কার করেন (নিউটনের পাশাপাশি সময়ে) এবং ক্যালকুলাসে ইন্টিগ্রাল চিহ্নটির ব্যবহার জনপ্রিয় করে তুলেন। তিনি বৃত্তের রেফারেন্স ছাড়াই π এর মান বের করার একটি পদ্ধতি বের করেন। যান্ত্রিক ক্যালকুলেটর উদ্ভাবনে তিনি অগ্রণী ভূমিকা পালন করেন। বাইনারি নাম্বার সিস্টেমের উন্নয়নেও তিনি গুরুত্বপূর্ণ অবদান রাখেন।

লিওনার্দ ইউলার

লিওনার্দ ইউলার (1707-1783) ছিলেন সর্বকালের সর্বশ্রেষ্ঠ একজন গণিতবিদ। তাকে টপলজির দাদা বলা হয়ে থাকে। তিনি টপলজির একটি বহুল ব্যবহারিক দিক গ্রাফ থিউরি আবিষ্কার করেন। তিনি গণিতের প্রায় সকল বিষয়ে অজস্র গবেষণাপত্র প্রকাশ করেছেন। তিনি গণিতের অনেক মৌলিক নোটেশন যেমন π, e, i ইত্যাদি আন্তর্জাতিকভাবে ব্যবহার করার দায়িত্ব নিয়েছিলেন। ইউলার প্রায় 30 বছর বয়সে তার একটি চক্ষু হারায় এবং 59 বছর বয়সে সম্পূর্ণ অন্ধ হলেও অন্ধত্বের ফলে তার বৈজ্ঞানিক জীবন বাধাগ্রস্ত হয়নি।

মারিয়া এগনেসি

মারিয়া এগনেসি (1718-1799) ছিলেন ইতালির বিশ্ববিখ্যাত মহিলা গণিতবিদ। ছোটবেলা থেকেই তার জ্ঞানের কথা ছড়িয়ে পড়ে এবং তাকে ডাকা হতো 'ওরাকল অব দি সেভেন টাঙ্গাস'। তিনি কিশোরবেলায় নিজে নিজেই ডিসক্রিট, নিউটন, লিবনিজ, ইউলার এবং অন্যান্য বিখ্যাত গণিতবিদদের গণিত শিখে ফেলেছিলেন। তিনি গণিত ও বিজ্ঞান বিষয়ক অনেক সভার আয়োজন করতেন এবং এর উপর নির্ভর করে মাত্র বিশ বছর বয়সে তার বই বের হয়। মেয়েদের উচ্চশিক্ষার বিষয়ে তার অনেক অবদান ছিল। মহিলাদের মধ্যে তিনিই প্রথমে ক্যালকুলাসের উপর একটি বই লেখেন, এবং তিনিই প্রথম মহিলা যিনি অধ্যাপক হিসাবে একটি বিশ্ববিদ্যালয়ে নিয়োগ পেয়েছিলেন।

যোসেফ লুইস ল্যাগ্র্যাঞ্জ

যোসেফ লুইস ল্যাগ্র্যাঞ্জ (1736-1813) ডিফারেন্সিয়াল ইকুয়েশন, এনালাইসিস, নাম্বার থিউরি, এনালাইটিক্যাল ও সেলিস্টিয়াল মেকানিক্স বিষয়ে বেশ বড় ধরণের অবদান রাখেন। তিনি বিভিন্ন দেশে মেট্রিক সিস্টেম প্রবর্তনের কমিটির প্রধান ছিলেন। তিনি নিউটনের ইউনিভার্সাল ল অব গ্র্যাভিটেশন সূত্রটি প্রমাণে বিশেষ ভূমিকা রাখেন।

পিয়েরে সাইমন ল্যাপ্লাস

পিয়েরে সাইমন ল্যাপ্লাস (1749-1827) ছিলেন অনেক বড় মাপের ফরাসী গণিতবিদ। 1799 থেকে 1825 সালে পাঁচ খণ্ডে লেখা Mechanique Celeste এবং 1812 সালে প্রকাশিত Theorie analytique des probabilities বইগুলোর জন্য তিনি বিখ্যাত ছিলেন। এই দ্বিতীয় বই থেকেই আধুনিক প্রোবাবিলিটি থিউরির জন্ম হয়। ল্যাপ্লাস ট্রান্সফর্ম আজও প্রকৌশলীদের জন্য গুরুত্বপূর্ণ হাতিয়ার।

কার্ল ফ্রেডরিক গাউস

কার্ল ফ্রেডরিক গাউস (1777-1855) অসাধারণ প্রতিভা নিয়ে জন্মগ্রহণ করেন। তিনি কথা বলতে পারার আগেই সংখ্যা নিয়ে কাজ করতে পারতেন। ঊনবিংশ ও বিংশ শতাব্দীর প্রায় সকল গণিতের শুরু হয় গাউসের কাজ থেকে। তিনি ১৭ বছর বয়সে এলজেবরার ফান্ডামেন্টাল থিউরির সঠিক প্রমাণ দিয়েছিলেন। তাকে ডাকা হয় গণিতের রাজপুত্র (প্রিন্স অফ ম্যাথেম্যাটিক্স)। নিউটন, আর্কিমিডিস ও গাউস - এই তিনজনকে ইতিহাসের সর্বশ্রেষ্ঠ গণিতবিদ হিসাবে দেখা হয়।

নিলস হেনরিক আবেল

নিলস হেনরিক আবেল (1802-1829) নরওয়েতে জন্ম গ্রহণ করেন। খুব অল্প বয়সেই তার গণিতের প্রতিভা ফুটে উঠে। তিনি তার ক্ষুদ্র জীবনের অনেকটা সময় এলজেবরার সমীকরণ সমাধানে নিয়োগ করেন। তিনি প্রমাণ করেন যে, পঞ্চম ঘাতের এলজেবরার সমীকরণ শুধু এলজেবরার অপারেশন দিয়ে সমাধান করা যাবে না। তিনি গ্রুপ কনসেপ্ট ব্যবহার করেন এবং তার নামানুসারে আবেলিয়ান গ্রুপ রয়েছে। আবেল দারিদ্র্যে জীবন কাটিয়েছেন এবং নরওয়ে ব্যাংকের ঋণ পরিশোধ করার আগেই মৃত্যুবরণ করেন। তার ছবিসম্বলিত নরওয়ের নোট রয়েছে। তাছাড়া 2002 সালে থেকে তার নামে প্রায় এক মিলিয়ন ডলারের আবেল পুরস্কার দেয়া হচ্ছে।

অগস্টা এডা বায়রন

Ada Lovelace (1815 - 1852)

অগস্টা এডা বায়রন (1815-1852) কম্পিউটার বিজ্ঞানের ইতিহাসে একটি শক্তিশালী অবস্থানে রয়েছেন। তিনি দাবী করেছিলেন যে, এমন একটি মেশিন বানানো সম্ভব যা জটিল সঙ্গীত তৈরিতে, গ্রাফিক্স তৈরিতে এবং বৈজ্ঞানিক কাজে ব্যবহার করা যাবে। একটি মেশিন কীভাবে বার্নুলি নাম্বার গণনা করতে পারে, তা ব্যাখ্যা করে তিনি ব্যাবেজকে চিঠি লিখেছিলেন। এটাকেই ধরা হয় প্রথম কম্পিউটার প্রোগ্রাম। 1979 সালে তার প্রতি সম্মান দেখিয়ে আমেরিকার ডিফেন্স বিভাগ এডা নামের একটি কম্পিউটারের ভাষা তৈরি করে।

জর্জ বুল

জর্জ বুল (1815-1864) লজিক শাস্ত্রে সিম্বল ব্যবহার করা শুরু করেন। এর মাধ্যমে তিনি জটিল লজিক্যাল সমস্যাগুলোকে সেটের উপন নির্ভর করে সিম্বলিক আকারে প্রকাশ ও সমাধান করতে পারতেন। সেটের বেসিক অপারেশন ইউনিয়ন ও ইন্টারসেকশন বুলিয়ান এলজেবরা হিসাবে খ্যাত। বর্তমানে সাউন্ড রিজনিং এর ক্ষেত্রে বুলিয়ান এলজেবরা বহুলভাবে ব্যবহৃত হচ্ছে।

জর্জ ক্যান্টর

জর্জ ক্যান্টর (1845-1918) হলেন বিখ্যাত জার্মান গণিতবিদ যিনি সেট থিউরির প্রতিষ্ঠাতা। বর্তমানে অনেক আধুনিক উন্নত গণিতের কাজের ভিত্তি হিসাবে এই সেট থিউরি ব্যবহৃত হয়। সেট থিউরিতে ক্যান্টরের অবদান তৎকালীন গণিতসমাজ সুনজরে দেখেনি এবং তাকে ভর্ৎসনাও করা হয়েছে যার ফলে তিনি হতাশায়ও ভুগেছেন। কিন্তু রয়্যাল সোসাইটি 1904 সালে গণিতের জন্য সর্বোচ্চ স্বীকৃতি সিল্ভেস্টার মেডাল প্রদান করে তার অবদানকে সম্মান জানিয়েছে।

গডফ্রে হার্ডি

গডফ্রে হার্ডি (1877-1947) ছিলেন ব্রিটেনের সমসাময়িককালের একজন শ্রেষ্ঠ গণিতবিদ। বিশুদ্ধ গণিতে তার অনেক অবদানের মধ্যে এনালাইসিস এবং নাম্বার থিউরি হলো মনে রাখার মত। বিশুদ্ধ গণিতের উপরে তার লেখা বই (পিউর ম্যাথেম্যাটিক্স) ইংল্যান্ডে গণিত শেখায় বৈপ্লবিক পরিবর্তন এনে দেয়। 1917 সালে তিনি বিখ্যাত গণিতবিদ রামানুজনের সাথে নাম্বার থিউরির উপর গুরুত্বপূর্ণ কাজ প্রকাশ করেন।

রামানুজন

রামানুজন (1887-1920) হলেন বিশ্ববিখ্যাত ভারতীয় গণিতবিদ। তিনি নাম্বার থিউরিতে বিশাল অবদান রাখেন। তার মনে রাখার ক্ষমতা ছিল অসাধারণ। তিনি প্রথম 10000 পূর্ণসংখ্যার বৈশিষ্ট্য মনে রাখতে পারতেন এবং প্রতিটি সংখ্যা যেন তার খেলার সাথী হয়ে গিয়েছিল। একদা হার্ডি অসুস্থ রামানুজনকে দেখতে যে ট্যাক্সিতে আসেন তার নাম্বার 1729 কে বোরিং নাম্বার বললে রামানুজন সঙ্গে সঙ্গে বলেন সংখ্যাটি খুবই মজার। কারন এটাই হলো সবচেয়ে ছোট পূর্ণসংখ্যা যা দুইটি ঘনের যোগফল হিসাবে দুইভাবে প্রকাশ করা যায়, অর্থাৎ $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$।

জন ভন নিউম্যান

জন ভন নিউম্যান (1903-1957) গেম থিউরির উপর কাজ করেন। কম্পিউটার বিজ্ঞান ও লিনিয়ার প্রোগ্রামিং-এ তার অনেক অবদান রয়েছে। তিনি ম্যানিয়াক (MANIAC - Mathematical Analyser Numerical Integrator and Computer) তৈরিতে সাহায্য করেন। তিনি এটম বোমা ও মিসাইল ডিজাইনের কাজেও সাহায্য করেন। আধুনিক কম্পিউটারের ভিত্তিই হলো ভন নিউম্যান আর্কিটেকচার।

পল আরডস

পল আরডস (1913-1996) ছিলেন বিংশ শতাব্দীর সবচেয়ে প্রতিভাবান হাঙ্গেরীয় গণিতবিদ। তিনি প্রায় 500 জনের সঙ্গে গবেষণা প্রবন্ধ রচনা করেছেন। মৃত্যুর কয়েক ঘন্টা পূর্বেও তিনি একটি জ্যামিতির সমস্যা সমাধান করেন। তিনি গ্রাফ থিউরি, সেট থিউরি, নাম্বার থিউরি ইত্যাদি বিষয়ে গুরুত্বপূর্ণ অবদান রাখেন। তিনি 1500 এর অধিক গবেষণা পত্র রচনা করেন যার প্রায় 400 তার মৃত্যুর পর প্রকাশিত হয়।

ডোনাল্ড আরভিন নুথ

ডোনাল্ড আরভিন নুথ (1938-) কে আধুনিক কম্পিউটার বিজ্ঞানের জনক বলা হয়। তিনি এলগরিদমের পারফরম্যান্স বিশ্লেষণের জন্য গাণিতিক পদ্ধতিকে সমৃদ্ধ করেন। তার লেখা বই - The Art of Computer Programming, Concrete Mathematics এবং Scientic writing software - TeX সারা পৃথিবীতে বহুল ব্যবহৃত। তিনি টুরিং পুরস্কারসহ নানা পুরস্কারে ভূষিত হয়েছেন। বুদ্ধিমত্তার জন্য ছোটবেলা থেকেই তিনি সুপরিচিত ছিলেন।

পরিশিষ্ট

ত্রিভুজ অঙ্কনের যত পদ্ধতি

সাধারণভাবে একটি ত্রিভুজ দুইটি বাহু ও একটি কোণ (SAS), দুইটি কোণ ও অন্তর্ভুক্ত বাহু (ASA) অথবা তিনটি বাহু (SSS) দ্বারা নির্দিষ্ট। কিন্তু এছাড়াও নানাভাবে ত্রিভুজ অঙ্কন করা যেতে পারে। এই পদ্ধতিগুলো তালিকাভুক্ত করার পূর্বে নিম্নের প্রতীকগুলো সংজ্ঞায়িত করি।

A, B, C: কোণ অথবা শীর্ষ বিন্দু

a, b, c: যথাক্রমে A, B, C শীর্ষের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য

h_a, h_b, h_c: যথাক্রমে a, b, c বাহুর উপর বিপরীত শীর্ষ থেকে অঙ্কিত উচ্চতা

m_a, m_b, m_c: যথাক্রমে a, b, c বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমা

l_a, l_b, l_c: যথাক্রমে A, B, C কোণের সমদ্বিখণ্ডক

H_a, H_b, H_c: যথাক্রমে a, b, c বাহুর উপর বিপরীত শীর্ষ থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু

M_a, M_b, M_c: যথাক্রমে বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু

L_a, L_b, L_c: যথাক্রমে a, b, c বাহুর উপর বিপরীত শীর্ষ কোণের সমদ্বিখণ্ডকের পাদবিন্দু

O, R: পরিকেন্দ্র ও পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ

H: শীর্ষবিন্দু থেকে অঙ্কিত উচ্চতাসমূহের ছেদবিন্দু

G: ভরকেন্দ্র

I, r: যথাক্রমে অন্তঃবৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ

I_a, I_b, I_c: $\triangle ABC$ ত্রিভুজের যেকোনো দুইবাহু a, b কে তাদের সাধারণ বিন্দুর বিপরীত দিকে বর্ধিত করলে যে রেখাদ্বয় তৈরি হয় তা এবং অন্য বাহু c যে বৃত্তের স্পর্শক তার কেন্দ্রকে I_a এবং ব্যাসার্ধকে r_a বলে। অন্যান্য প্রতীকগুলো অনুরূপভাবে সংজ্ঞায়িত

p: অর্ধপরিসীমা = $\dfrac{(a+b+c)}{2}$

aa, bb, cc: যথাক্রমে a, b, c বাহুগুলোকে বর্ধিত করলে যে রেখাসমূহ হয়

S: ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

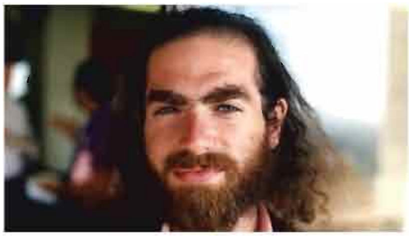
S_a, S_b, S_c: যথাক্রমে A, B, C কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সাপেক্ষে ওই বিন্দুসমূহ থেকে অঙ্কিত মধ্যমাগুলোর প্রতিসম সরলরেখাসমূহের পাদবিন্দু।

সূত্র: http://www.cut-the-knot.org/triangle/			
a, b, C (SAS)	A, B, c (ASA)	a, b, c (SSS)	A, a, b (ASS)
M_a, M_b, M_c	a, b, m_c	a, b, m_b	m_a, m_b, c
m_a, m_b, b	H_a, H_b, H_c	h_c, l_c, m_c	R, a, b
R, h_a, a	R, m_a, a	h_a, b, c	h_a, h_b, b
h_a, h_b, c	h_a, a, b	m_a, m_b, h_c	h_a, h_b, m_c
A, h_b, h_c	a, h_b, R	h_a, h_b, m_a	A, h_a, m_a
a, b, l_c	A, h_a, p	A, R, r	a, R, r
aa, H_b, H_c	h_a, h_b, h_c	A, a, h_a	A, a, m_a
a, h_b, l_c	A, B, h_c	A, h_a, l_a	A, a, r
A, a, R	A, B, p	a, b, A	A, B, l_c
m_a, h_a, m_b	a, h_a, m_a	a, h_a, m_b	a, h_b, m_a
a, h_b, m_b	a, h_b, m_c	A, h_a, h_b	m_a, m_b, m_c
l_a, l_b, l_c	a, l_a, h_a	A, O, H	A, B, G
a, m_a, l_a	A, B, H	A, B, I	O, H, I
m_a, h_a, h_b	m_a, h_b, h_c	m_a, h_a, l_a	R, a, m_a
$A, a, b+c$	$A, b, a+c$	$A, a, b-c$	$m_a, m_b, a/b$
R, a, m_b	A, a, l_a	h_a, l_a, b	A, m_b, h_a
A, r, m_a	$a, A, m_c/m_b$	$a, r, \quad h_a$	$A, r, \quad c-a$
A, r, ha	l_a, h_a, R	l_a, h_a, r	m_a, h_a, R
m_b, h_a, A	m_b, R, A	h_a, m_a, r	aa, bb, the Euler line
A, O, I	R, r, h_a		

আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াড

পৃথিবীর সকল দেশের ক্রীড়াবিদদের নিয়ে যেমন ক্রীড়ার শ্রেষ্ঠ আসর অলিম্পিক খেলা হয় ঠিক একইভাবে সারা পৃথিবীর মেধাবী তরুণদের নিয়ে বিভিন্ন বিষয়ে অলিম্পিয়াড প্রতিযোগিতা অনুষ্ঠিত হয়। গণিত, পদার্থ বিজ্ঞান, রসায়ন শাস্ত্র, ইনফরমেটিক্স (কম্পিউটার প্রোগ্রামিং), জীববিজ্ঞান, দর্শন, ভূগোল ও মহাকাশ বিদ্যা এর মধ্যে অন্যতম। এই প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণের মাধ্যমে সকল দেশের ছেলেমেয়েদের মধ্যে যেমন বন্ধুত্বের সম্পর্ক স্থাপিত হয়, ঠিক তেমনি এই প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণের ফলে বিভিন্ন দেশের ছেলেমেয়েদের মধ্যে বিশ্বমানের দক্ষতাও তৈরি হয়। এই অলিম্পিয়াডগুলোর মধ্যে সর্বপ্রথম শুরু হয় আন্তর্জাতিক গণিত অলিম্পিয়াড (আইএমও)। এর প্রথম আসর বসে ১৯৫৯ সালে রুমানিয়ায়। ঠিক অলিম্পিক আসরের মত এই প্রতিযোগিতা বিভিন্ন দেশে ঘুরে ঘুরে অনুষ্ঠিত হয়ে থাকে। আইএমওতে একটি দেশ থেকে সর্বোচ্চ ৬ জন স্কুল-কলেজ পর্যায়ের ছাত্র/ছাত্রী অংশগ্রহণ করতে পারে। তাদের সঙ্গে একজন দলনেতা এবং উপদলনেতা থাকতে পারে। মেধার এই শ্রেষ্ঠ আসরে বাংলাদেশ সর্বপ্রথম ২০০৫ সালে অংশগ্রহণ করে। এযাবত এই প্রতিযোগিতা থেকে বাংলাদেশের প্রতিযোগীরা ৬টি রৌপ্য, ১৯টি ব্রোঞ্জ এবং ২৫টি সম্মানসূচক উদ্ধৃতি অর্জন করে প্রমাণ করেছে যে যত কঠিনই হোক না কেন আমাদের তরুণেরা দক্ষতার সঙ্গে চ্যালেঞ্জ মোকাবিলা করতে পারে। পৃথিবীর নামকরা বিশ্ববিদ্যালয়গুলো আইএমওতে সাফল্য অর্জনকারী ছাত্রদের পড়ালেখার জন্য আকৃষ্ট করে।

টেরেন্স টাও


গ্রিগরি পেরেলম্যান

মরিয়ম মির্যাখানি

এই প্রতিযোগিতায় অংশগ্রহণ করে পরবর্তী জীবনে অনেকেই নামকরা বৈজ্ঞানিক হয়েছে। অনেকেই গণিতের নোবেল পুরস্কার খ্যাত ফিল্ডস মেডালসহ নানা গুরুত্বপূর্ণ স্বীকৃতি পেয়েছে। এর মধ্যে টেরেন্স টাও (সর্ব কনিষ্ঠ আইএমও ব্রোঞ্জ, রৌপ্য, স্বর্ণ পদক ও ফিল্ডস মেডাল বিজয়ী এবং অতিপ্রজ গবেষক), গ্রিগরি পেরেলম্যান (১৯৮২ সালে আইএমওতে পূর্ণ নম্বর পেয়ে স্বর্ণ পদক পান, পয়েনকারে কনজেকচার প্রমাণ করার সুবাদে এক মিলিয়ন ডলারের পুরস্কার এবং ২০০৬ সালে ফিল্ডস মেডাল নিতে অস্বীকার করেন), ফিল্ডস মেডাল বিজয়ী প্রথম মহিলা স্ট্যানফোর্ড বিশ্ববিদ্যালয়ের অধ্যাপক ইরানের মরিয়ম মির্যাখানি (১৯৯৫ সালে আইএমওতে পূর্ণ নম্বর পেয়ে স্বর্ণ পদক পান এবং ২০১৭ সালে মাত্র ৪০ বছর বয়সে এই ক্ষণজন্মা গণিতজ্ঞ মৃত্যুবরণ করেন) উল্লেখযোগ্য।

সমাপ্ত

২০১৯
শিক্ষাবর্ষ
দাখিল
৯ম-১০ম উচ্চতর গণিত

'সকল বিজ্ঞানের রানি হচ্ছে গণিত।'–কার্ল ফ্রেডারিক গাউস

সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ে তোলার জন্য যোগ্যতা অর্জন কর
– মাননীয় প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা

নারী ও শিশু নির্যাতনের ঘটনা ঘটলে প্রতিকার ও প্রতিরোধের জন্য ন্যাশনাল হেল্পলাইন সেন্টারে ১০৯ নম্বর-এ (টোল ফ্রি, ২৪ ঘণ্টা সার্ভিস) ফোন করুন

শিক্ষা নিয়ে গড়ব দেশ
শেখ হাসিনার বাংলাদেশ

শিক্ষা মন্ত্রণালয়

২০১০ শিক্ষাবর্ষ থেকে গণপ্রজাতন্ত্রী বাংলাদেশ সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য